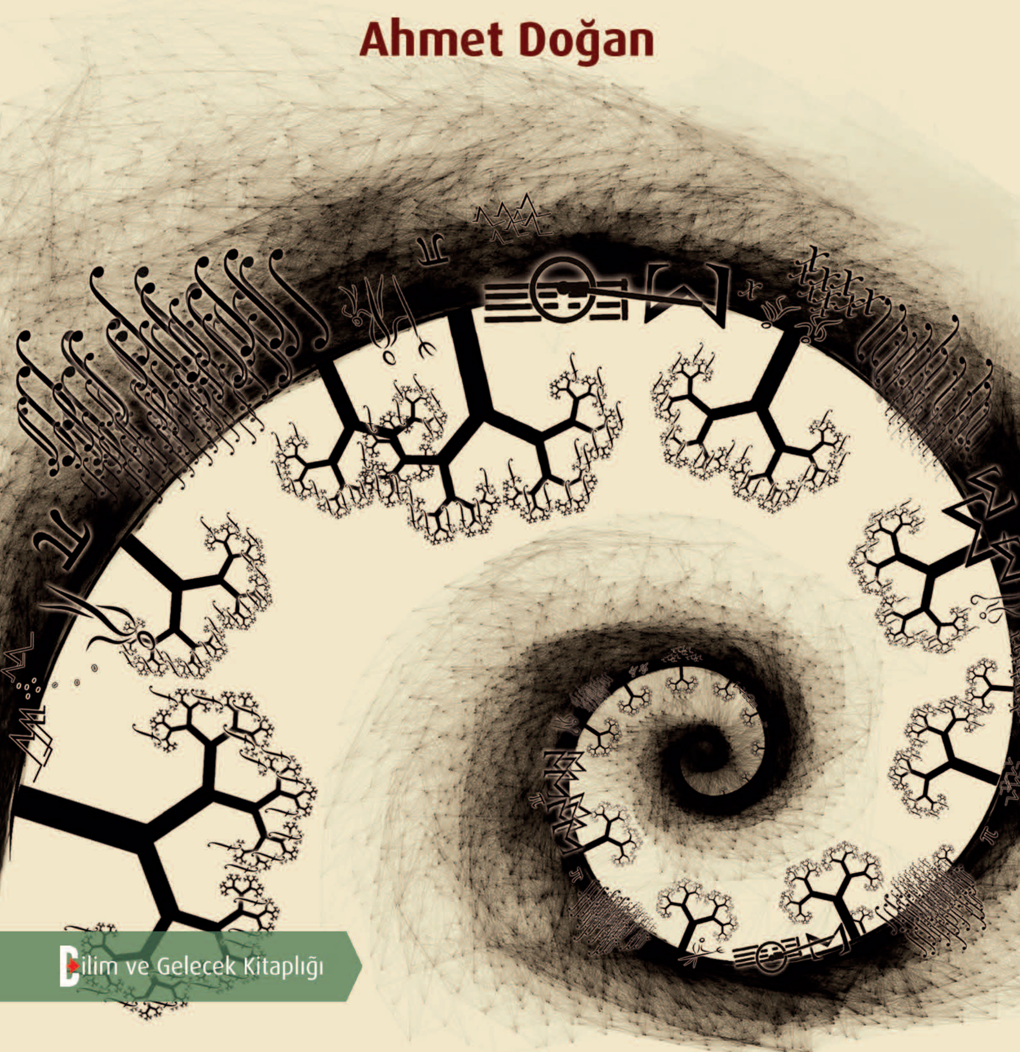
-öğretenler ve öğrenenler için-

NEDEN, HANGİ, NASIL MATEMATİK?

Ahmet Doğan



Bilim ve Gelecek Kitaplığı



Bilim ve Gelecek Kitaplığı

Bilim ve Gelecek Kitaplığı - 41

-Öğretenler ve öğrenenler için-
Neden, hangi, nasıl matematik?

Ahmet Doğan

Birinci Baskı: Ekim 2014

ISBN: 978-605-5888-40-4

Yayıma hazırlayan: Baha Okar
Kapak tasarım: A. Yücel Doğan

Baskı: Kayhan Matbaacılık
Davutpaşa C. Güven Sanayi Sitesi B Blok,
No: 244, Topkapı / İstanbul
Tel: 0212.612 31 85

7 Renk Basım Yayın ve Filmcilik Ltd. Şti
Tel: 0216.349 71 72
Caferağa M. Moda C. Zuhal S. No: 9/1, Kadıköy-İstanbul
http://www.bilimvegelecek.com.tr • bilgi@bilimvegelecek.com.tr

AHMET DOĞAN

-öğretenler ve öğrenenler için-

neden, hangi, nasıl MATEMATİK?



Ahmet Doğan

Ahmet Doğan, 1967-68 öğretim yılında Ortaklar İlköğretmen Okulu'ndan mezun olarak, 17 yaşında öğretmenliğe başladı. Sınıf öğretmenliğine devam ederken, bir yandan Isparta Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümü'nü bitirdi. Devlet okullarında uzun yıllar süren öğretmenlik yaşamı, 20 yıl dershane öğretmenliğiyle devam etti. Doğan'ın, eğitim-öğretim sorunları ve matematikle ilgili çok sayıda yayımlanmış makalesi ve ilköğretim okulları için hazırladığı ders kitabıyla, üniversiteye hazırlık kitapları bulunmaktadır. Bilim ve Gelecek Kitaplığı'ndan çıkmış, *Matematik "yaramaz"dır* ve *1968 Devrimci Eğitim Şurası - 1969 Öğretmen Boykotu* adlı kitapların da yazarıdır.

İÇİNDEKİLER

SUNUŞ

İlkokul öğretmenliğine başladığımda benim yaşımda öğrencilerim vardı. Hatta benden büyükler bile. Ben 17 yaşımdaydım. Bazı öğrencilerim 18 yaşında. Ancak sorun olmadı. İlk öğretmen okulunda 6 yıl boyunca bu tür durumlara uygun olarak yetiştirilmiştik. Öğrencilerime Türkçe, Matematik, Fen Bilgisi, Sosyal Bilgiler dersleri dışında yaşamı da öğretecektim. Ben öğrencilerim için "ne çok bilen"dim. Köylüler için de öyle. Radyo dinleyen (radyosu olan), kitap-gazete-dergi okuyan, olanak buldukça yazan, gezen-görendim. O yıllarda sıraladıklarımın dışında iletişim araçları yoktu zaten. Elbette bu olanaklara sahip olmak ayrıcalıktı, önemliydi. Ama onun kadar önemli olan, 6 yıl boyunca İlköğretmen Okulu'nda aldığım eğitimdi. İnsan sevmek, doğa sevmek, yurt sevmek, emeğe saygı gibi erdemler yanında; "kültürlü" olmayı, okumayı, araştırmayı genlerimize işlemeye çalışıyorlardı sanki. En iyi futbol oynayan, en iyi saz çalan da olsan, okumak-öğrenmek-araştırmak alışkanlığı öncelikli değere sahipti.

Aldığımız eğitim boyunca kazandığımız davranışlar önemli ama yeterli mi? Öğretmek üzere eğitilmişsin. İşbaşı yaptığında önce şöyle düşünüyorsun: "Bildiklerimi söylerim öğrenirler." Bilmediklerimi de öğrenirim, yine söylerim ve öğrenirler!.. Ama

olmuyor. Öğrenme etkinliğinin bu denli düz olmadığını mesleğe ilk adımı attığınızda öğreniyorsunuz. Kısa sürede, "öğretmenin ne anlattığı değil, öğrencinin ne anladığı önemli" deyişi, ilkeniz oluyor. Öyle olunca da öğrencilerinize "öğrenme yeteneği yok" damgasını vurma kolaycılığına sapmıyorsunuz. Nasıl öğreteceğinizi aramaya başlıyorsunuz. İlk ulaştığınız sonuç "ayaklı ansiklopedi" olmanın işe yaramayacağı sonucu oluyor. O zaman da aldığınız eğitimin "öğretmeyi öğrenmek" üzerine kurgulandığını fark ediyorsunuz. Siz de bugünün moda deyimiyle "öğrenmeyi öğretmek"le yükümlü olduğunuzu anlıyorsunuz. Çünkü öğretim programlarında öngörülen bilgiyi aktarmaya ne zamanınız yeterli ne de soluğunuz.

İlkokul öğretmenliğine başladığımda matematik öğretmenin diğer derslerden daha zor olduğunu gördüm. Matematik öğretirken "İşte orada!" ya da "Görüldüğü gibi..." deme şansı yok denecek kadar azdı. Ama matematik öğretmek zor olduğu kadar eğlenceliydi. Hem öğrenciler eğleniyordu hem ben. Zoru başarmanın hazzı da cabası.

Branş öğretmeni olarak ortaokul ve lisede matematik öğretmenliğine başladığım zaman matematik öğretmenin zorluğunu daha yoğun yaşadım. Giderek soyutlama öne çıkıyordu. "Görüldüğü gibi..." deme şansım iyice azalmış, buna karşılık "ne işime yarayacak?" sorusu ile çok karşılaşır olmuştum. O aşamada yeni bir şey daha öğrendim; "programda yazılı olanı bilmek" yetmiyordu. "Matematiğin ne olduğunu" bilmeden sorunların üstesinden gelemezdim. Kendime sorduğum sorular art arda gelmeye başladı. Ne zamandan beri matematik öğreniliyordu? Neden öğrenilmeliydi? Hangi matematikler vardı ve hangileri öğretilmeliydi? Nasıl öğretilmeliydi? Öğrenenlerin öğrenme düzeyleri neden farklıydı? Farkı aza indirgemek için neler yapılmalıydı?.. Benzer sorular benim için hep gündemde kaldı. Bunların biriyle bile tek başıma baş edebilmem kolay değildi. Değildi, çünkü matematik yaşamın her alanında zor ama sevimli (hınzır mı demeliyim) yüzüyle karşımıza çıkıveriyordu. Bu hınzır güzellikle (ve de gereklilikle) ilgili sıraladığımız sorular tarih boyunca gündemdeydi. Ve sorulmaya devam edilecekti.

Tarihsel birikimin yarattığı bu kolektif disiplin sorulan sorulara verilen yanıtlar üzerinde yükselmişti. Yükseldikçe yeni sorular sorulmuş, yeni yanıtlar bulunmuş daha da derinleşmişti. Biteviye kolektif bir etkinlik...

Bu kolektifin bir elemanı olarak ben bu kitapta bazı sorulara yanıt aradım. Aslında sorular her matematik öğretmeninin soracağı türden. Vermeye çalıştığım yanıtlar da sadece bana ait değil. Yanıtlarda yaşanmışlıkları, deneyleri ve araştırmayı önceledim. Bu anlamda yanıtlar da öğretmen arkadaşlarımın, öğrencilerimin, çevremdeki diğer insanların ve de bugüne dek yapılan çalışmaların katkılarından oluşuyor.

Üç temel soruya yanıt aradım kitapta: "Neden matematik, hangi matematik, nasıl matematik?" Daha açık söylersek ne zamandan beri ve neden matematik öğretiliyor? Matematik programları matematiğin hangi yönlerini içermeli? Öğretimde yöntem, planlama ve öğretmen yaklaşımı nasıl olmalı gibi...

Sorulara verdiğim yanıtlar aynı zamanda biraz savunma, biraz tepki içerikli. Savunma içerikli, çünkü başarısızlığın faturası öğretmene kesilmektedir. Oysa kazın ayağı öyle değil. Matematik öğretiminde matematiğin sınıfta işlenişi dışında, öğretim programları, öğretim ortamları, öğretmen yetiştirme, öğretim yöntemlerini geliştirme, öğretmenin hizmet içinde eğitimi, öğretmenin iş güvencesi, ekonomik ve sosyal koşulları vb. birçok boyutu var. Bunlar "öğretmenin kendisini yetiştirmesi" ile sınırlı olamayacak çoklukta. O nedenle, öğretmeni başarısızlığın temel nedeni saymak insafla bağdaşmaz.

Tepkim ise özel olarak matematik eğitimini genel olarak da eğitimi düzeltme adına "harikalar" keşfetme peşinde olanlara. Bilgisayarın başına geçip "toplama" yazmaya görün. Sayfa sayfa yazılar, makaleler, yorumlar. Ne denli doğru ne denli bilimsel belli değil. Günün ve geleceğin sorunu tam da bu: "Doğru olanı" seçebilmek, doğru bilgiye ulaşabilmek! Sorun buyken birileri bilgisayarın başına geçip "çağdaş eğitim yöntemleri"ni ya da "kolay matematik öğretme yolları"nı buluveriyor. Çoğu eskiden beri bilinen ya da yeni olsa bile uygulanması belli koşullara bağlı olabilecek nitelikte "buluş"lar. Birdenbire gündeme gelen,

umutları kaşıyan ve bir süre sonra yerini yeni "buluş"lara bırakan harikalar. Asıl tepkim "buluş"ların, "falan ülkenin eğitim yöntemleri" veya "çağdaş matematik öğretimi" gibi adlandırılarak medya desteğiyle sunulması ve buna zaman zaman sorumluların da katılması. Elbette çok değerli araştırmalar, iyi örnekler var. Elbette bunlardan yararlanılmalı. Ama bir şeyi bilerek: "yerküremizde mükemmel bir matematik öğretimi" modeli yok! Olamaz da… En iyi yöntem, daha iyinin yapı taşları gibidir. O nedenle iyiyi ararken olanı yok saymak, yapılanları küçümsemek aymazlığına düşmemek gerek.

Kimler okur bu kitabı? Hani hedef kitle derler ya… Bu sorunun bende net bir yanıtı yok. Matematikçi, matematik öğretmeni, her alanda eğitimci, mühendis, sosyal bilimci, öğrenci… Matematiğe ilgi duyan herkes. Elbette bir sosyal bilimci matematik ağırlıklı bölümlerde biraz zorlanabilir. Onlardan okurken biraz sabır bekliyorum. Özellikle "uygulamada matematik" bölümünü daha çok matematik öğretmeni arkadaşlarla paylaşmak için yazdım. Yaşanmışlık ağırlıklı. Ama dediğim gibi sadece benim değil öğretmen arkadaşlarımla birlikte yaşadığımız paylaşımlar. Ve doğal olarak okuyanlar farklı düşünebilir, itiraz edebilir. "Şöyle uygulama daha doğru" diyebilir. Elbette bu da iyi bir şey… "En doğru"yu bulmanın kolay olmadığını biliyorum.

Kimler okur sorusuna "ilgi duyan herkes" yanıtını verirken de gerekçem var. Kitabı baskı öncesi herkes yelpazesinde birçok arkadaşım inceledi, düşüncelerini iletti, eleştirdi. Hani önsöz yazılırken katkıda bulunanlara teşekkür edilir… Ama o denli çok ki inceleyen dostlarım… Oğullarımdan yeğenlerime, matematikçi olan arkadaşlarımdan matematikçi olmayan arkadaşlarıma, akademisyenlerden öğrencilerime dek birçok dost… Hatta kitabın sayfa düzenini yaparken (kaşla göz arasında) Pia Zeynep'in babası sevgili Baha bile eleştirileri önerileriyle katkıda bulundu. Eksik sayarım endişesiyle katkıda bulunanların adlarını sıralamaktan kaçındım. Bana gücenmeyeceklerine güvenerek.

Çok şanslıyım sanırım.

-I-
EĞİTİM VE ÖĞRETİM

ÖĞRENEREK ÖĞRETMEK

İlk öğretmenlik yılım. İlkokul birinci sınıf öğrencilerine rakamları öğretiyorum. Kitaplarında rakamlar, bir kiraz resminin yanında "1" sayısı, iki kiraz resminin yanında "2" sayısı biçiminde devam ederek gösterilmiş. Bir kirazın sayısı "1" şekliyle gösterilir, buna bir deriz; iki kirazın sayısı "2" şekliyle gösterilir buna iki deriz diye açıklamaya çalıştım. Ne ölçüde anladıklarını ölçmek için küçük ve başparmaklarımı kapatıp elimi uzattım sordum: Bu kaç? Ses yok. Yine sordum yine ses yok, yüzüme bakıyorlar. Biraz bozuldum, tahtaya geçip kocaman bir "3" yazdım ve sordum; bu ne? Sessizlik yırtıldı. Neredeyse koro halinde yanıt geldi: Kiraz… Biraz şaşkın biraz kızgın, "ne biçim kiraz bu, siz hiç kiraz görmediniz mi?" Bir öğrenci atıldı: "Kocaman kiraz…" Tebeşiri attım elimden… Daha işin başındayım. İlk günlerim, ilk şok ve aldığım ilk ders! Oysa ne kadar da emindim, "1, 2, 3…"ü öğrettiğime.

Evime çekildiğimde düşünmüştüm. Bu kadar zor mu olacaktı öğretmek? Ya toplamayı, çıkarmayı nasıl öğretecektim? Gerilere döndüm. İlkokuldan sonra altı yıl okuduğum İlköğretmen

Okulu yıllarına. Birinci sınıftayız. Ders matematik. Öğretmenimiz, dersi bahçede yapacağız, dedi. Tarım dersleri bahçede yapılıyordu. Fen dersi laboratuvarda, resim dersi resim salonunda, beden eğitimi dersi spor alanlarında. Ama matematik dersinin bahçede yapılmasına anlam verememiştik. Yaptığımız dersi de anımsıyorum. Bahçede çalı çırpı ile süpürerek kendimize yazma alanı açmış, yeri çubuklarla kazarak öğretmenin sorduğu problemleri, işlemleri çözmüştük. Rakamları düzgün yazmadığım için öğretmenimiz tarafından paylandığımı da anımsıyorum. Dediğim gibi anlam verememiştik ama bahçede matematik hoşumuza da gitmişti. Türkçe dersinde bir ağacın altında toplanıp okuma parçası incelemelerinde, canlandırmalarında da. İşte o yıllarda anlam veremediğimiz ve bize "niçin böyle yaptığımız" söylenmeyen dersler yıllar sonra anlam kazanacaktı. Öğretmen olacaktık. Öğretmenler ısrarla; "burada öğrendikleriniz önemli ama öğreneceklerinizin küçük bir bölümü, öğretmenlik yaparken öğreneceklerinizin anahtarı. Öyle bir anahtar ki, birçok kapıyı açar. Her kapının arkasında yepyeni şeylerle karşılaşacaksınız. Kapıları açarak, yaşayarak, sürekli öğrenmelisiniz." Onlar derdi de sanırım biz pek anlamazdık. Neydi ki sonuçta? Birçok ders görmüş, "her şeyi" öğrenmiştik. Gider anlatırız, çocuklar da öğrenirdi… Nereden bilecektim "yaşamın nesnesi olan kirazın, matematiğin nesnesi olan 3'e dönüşmesinin o kadar kolay olmadığını"?

Öğretmen olduktan sonra söylenenlerin önemini giderek anladım. Nasıl anlamayayım ki, yaşıyor, şaşırıyor ve öğreniyordum. Benim yalıtılmış dünyamın dışında da, insanların yılların deneyimiyle akıl yürüterek ürettiği ortak çözümler hatta buluşlar vardı. Yöntem de basitti. Sorunla karşılaşıyor, çözmek istiyor, akıl yürütüyor, belki de deniyor ve buluyorlardı. Çözümde fizik vardı, kimya vardı, biyoloji vardı, mühendislik bile vardı. Ama matematik pek yoktu! Hani şu bilindiği varsayılan matematik!

Karda yüzmek

Doğu Anadolu'da bir dağ köyünde öğretmenim. İnsan boyunca yağmayan karın kar sayılmadığı köylerden. Cumartesi ve pazar tatil günlerim. Köylülerle cuma günü karar verdik. Cumar-

tesi komşu köye gezmeye gideceğiz. Cumartesi uyandığımda en az bir metre kar yağdığını gördüm. Bana göre gezi olanaksızdı ve iptal edilmeliydi. Çünkü taze yağmış karda yüz metre yürümek bile zordu... Öyle değilmiş. Köylüler kapıdaydı. “Haydi, hocam” dediler. Yola koyulduk. Kar yumuşak, toz gibi. Öne geçti bir genç yüzmeye başladı. Sanki suda yüzüyor. Yüzerken karları sağa sola savuruyor, bedeni altta kalan karı sertleştiriyor. Açtığı yoldan yürüdük. Yoruldu, bir başkası öne geçti ve yüzmeye başladı. Sonra bir diğeri… Doğa, engel ve insanın ürettiği çözüm... Şaşırmıştım.

Köprüye çatı

Doğu Karadeniz’de gezideyim. Ardeşen çevresi. Alabildiğine orman, yeşilin her tonu. Dereler bol. Üzerinde bir insanın hayvanıyla geçebileceği genişlikte köprüler de. Derenin iki yakasındaki orman içi yolları birleştiriyor. Anadolu’nun her yerinde olduğu gibi. Bir farkla ki, bunların çatısı var. Çatılı köprü… İlk akla gelen; “Karadenizlinin muzipliği”. Sordum yaşlı bir köylüye. “He” dedi, “komiklik olsun diye yaptık, gülesiniz diye”. Devam etti. “Ne komikliği efendi… Yüzlerce yıldır böyledir buralarda. Yağış bitmez bizde. Yağışla beraber yıldırım da. Düştümü de yakar adamı eşeğiyle birlikte. Yağışta o çatının altında bekler dereyi seyredersin. Romantik, romantik. Durunca da eşeğe deh dersin.” “Fizik” bilmez köylünün, yıldırıma karşı çözümüydü bu. Yaşlı köylünün anlatımı ise bir başka güzel…

Fareyi heykel yapmak…

Ege köyünde öğretmenim. Evime fareler dadandı. Ekmeğime ortaklar. Tek bakkalımız var. Fare ilacı sordum. “Yok” dediler. Orada bulunan bir köylü, “biz zehir kullanmayız hocam” dedi. Yüzüne baktım. “Biz fareleri heykel yaparız.” Kesekâğıdına bir avuç un, bir avuç alçı koydu. Evime gittik beraber. Un alçı karışımını bir gazetenin üzerine yaydı. Yanına da gereksiz bir kap içinde su. “Ziyafet hazır hocam. Fareler bunu yiyecek, suyu da içecek sonra da heykel olacak. Delikte bile ölse kokmaz…” İki gün içinde evimde fare kalmadı. “Biyoloji” okumamışlardı ama farenin sindirim yapısını, dışkılama özelliğini biliyorlardı…

Zeytinyağından lâmba

Aynı köydeyim. Köy gençleri benim evimde. Birkaç gün sonra sergileyeceğimiz tiyatronun son çalışmalarını yapıyoruz. Elektrikler söndü. 5-10 dakika bekledik gelmedi, belli ki gelmeyecek. Hiçbir yedeklemem de yok. Çalışmayı erteleyemeyiz, zamanımız kalmadı, telaşlandım... Gençlerden biri, "pamuk var mı hocam" dedi. Pamuk verdim. Mutfağa geçtik. Cam bir çay tabağına zeytinyağı koydu. Fitil haline getirdiği pamuğu bir ucu boşta kalacak biçimde yağa yatırdı. Az bekledik. Boşta kalan ucu yaktık. Zeytinyağından lambayla odaya geçtik. Yoktan var olan lamba ışığında çalışmamızı tamamladık. Bu genç arkadaş da "kimya" okumamıştı.

Sudan tuz çıkarma

Akdeniz'le Ege'nin çatalında bir koy. Birkaç ev var. Sahil içleri tarım alanı. Eskiden gemiler sığınırmış fırtınalı havalarda. Şimdi turizm alanı. 10-15 metrekarelik kümbet temeline benzer bir yapı. Kırık dökük. Ortasında yıllardır biriken toprakla dolu bir havuz, havuzun çevresi fırdolayı kanal. "Nedir?" diye sordum bilene. "Buralarda tatlı su azdır. Eskiden bununla suyun tuzunu çıkarırlarmış. Senin anlayacağın arıtma yani. Havuzu deniz suyuyla doldururlarmış, bunun üstü de cam gibi bir şeyle kapalıymış. Güneş vurdukça hamamdaki gibi su buharlaşır, yandaki kanallara akarmış. Tuz havuzda, tatlı su kanallarda. Her adada da vardır bunlardan." Geçmişi yüzyıllara dayanan bir başka deneyim, bir mühendislik… Yapanlar mühendis değil!

Çok örnek sıralanabilir. Bunlar yıllar öncesine ait yaratılar, buluşlar. Yeni ve daha gelişmiş çözümler çoğunu kenara itmiş. Ama yeni dediğimiz çözümler bunlar üzerine inşa edilmiş, geliştirilmiş. Dünkü ya da bugünkü bilimle veya bilim olmadan üretilmiş de olsa değişmeyen; öğretmenlerimizin bize, "öğreneceğiniz çok şey var" söylemlerinin örnekleriydi. Halkın kendi deneyimleri, gözlemleri ile akıl yürütmeyle ürettiği çözümlerdi bunlar. Nedenlerini tam açıklayamasa da! Bizse bu çözümlere şaşırıyor ama açıklayabiliyorduk. Bu çözümler öğrendiklerimizin uygulaması, bir başka değişle sınanmasıydı. Bir döngü gibi. Bu

döngü bir anlamda bilimin oluşumunun basit bir açıklamasıydı. Öyleyse bilimi-bilgiyi taşımakla yükümlü öğretmen, eğitim-öğretim etkinliğini yaşamla birleştirmeliydi. Öğretmenlerimizin “yaparak-yaşayarak öğrenme” dedikleri yöntem, gözlemlerimiz sonucunda anlam kazanıyordu.

Verdiğimiz veya verebileceğimiz örneklerin çoğu “fen” diye okuduğumuz derslerle ilintiliydi. İster istemez akla şu soru geliyor: “Matematik nerede?” Yıllarca okuduğumuz her dersin yaşamda karşılığı doğrudan vardı. Matematik ise yok gibiydi. O nedenle değil midir ki hep sorulur; “matematik ne işe yarar” diye. Oysa her adımda vardı matematik. Karda atılan kulaç sayısında, köprünün tahtalarının sayısında, gidilecek yolun süresinde, çatının eğiminde, cam kubbenin eğikliğinde, un alçı karışımının oranında, yağdan lâmbanın fitilinin uzunluğunda… Parmakla sayılmasa, cetvelle ölçülmese, kâğıt kalemle hesaplanmasa da… Yaşamın her anında, her yerde olan ama görünmeyen… *Bilim ve Ütopya* dergisinin 192. sayısında Prof. Dr. Timur Karaçay’ın dediği gibi; “en az matematik bilen kişinin bile bildiği en basit matematiği belleğinden sildiğini düşünün”. Hali nice olurdu?

ÖĞRETMEYİ ÖĞRENMEK

Zamanla sayıları nasıl öğreteceğimi ve diğer öğretim yaklaşımlarını kısa sürede öğrenmiştim. İşler yolundaydı. Ancak 30 yıl sonra yaşadığım olay benim “öğrenmiş” olmamın yetmediğini gösterdi bana. Bir dershanede matematik öğretmeniyim. Üniversite sınavlarına hazırlanan öğrencilerle ders yapıyoruz. Bu arada da öğrencilere okul dersleri konusunda yardımcı oluyorum. Aynı okula giden bir grup öğrenci ısrarla okulda anlatılan “Karmaşık Sayılar” konusunu anlamadıklarından yakınıyorlardı. Yakınmanın devamı olarak da “hele o omega’yı hiç anlamadık” diyorlardı. Ben de anlamamıştım omegayı. Karmaşık sayılarda “omega” neydi? Öğretmen arkadaşlarıma sordum. Onlar da bir anlam veremedi. Çocukları çağırdım ve benim de anlamadığım “omega”yı bir yana bırakıp konuyu baştan itibaren anlatmaya başladım. Omega neyse çıkar ortaya diyerek. Adım adım gidiyorduk. Tepkiler iyiydi. Anlattığım her şey anlaşılıyordu. Son-

lara yaklaştık. Karmaşık sayının kuvvetini almayı öğrendik ve ardından ayrı bir başlık açmadan 1/2'nci kuvvetini yani karekökünü almayı sordum. Rahatlıkla çözdüler. Bize ikinci kökü tartışmak kaldı. Tartışma sonuçlandığında öğrencilerden biri ve en çok yakınanı "Aaa. İşte buydu! Omega buymuş. Anladım." tepkisini verdi. O anda anımsadım. Kitaplarında karmaşık sayının karekökleri "ω" (omega) simgesiyle gösteriliyordu. Öğretmenleri "karmaşık sayının karekökünü bulun" yerine "omegalarını bulun" diyordu. Ve karmaşık sayıların "omega"sı çocukların baş belası olmuştu. Yine de şükrettim. Öğretmen "karmaşık sayının dabilûvesini bulun" da diyebilirdi.

Bu örnek yukarıda aktardığım ilkokul birinci sınıflara sayıları öğretmek örneğiyle aynı değil elbette. Ama bu da önemli bir eksiklik. Terimleri, kavramları ve dili doğru kullanmamak öğrenmeyi doğrudan engelliyordu. Daha net söylersek, bu zaaf öğrenenin algısını ve öğrenme süreçlerini göz önünde bulundurmayan bir tutum ki öğretmenin eğitimci yanının tartışılmasına neden olacak bir davranış…

EĞİTİM-ÖĞRETİM İKİZLİĞİ

Konuşmada ve yazmada sık kullanılan ikiz sözcükler vardır. Bazen zıtlığı vurgulamak için kullanılır: "Ak ve kara" gibi. Bazen ironik bir ilişki vardır ikizler arasında: "Güzel ve çirkin" gibi. Bazen uyumu vurgular: "beden ve sağlık", "vatan ve namus" gibi. Kimileyin biri olmazsa diğeri öksüz gibidir: "aşk ve sevgi", "barış ve özgürlük" gibi. Zıt sözcükler de olsa aralarında ironik ilişki de olsa, uyumlu ve tamamlayıcı da olsa birbirine güç verir ikiz sözcükler. Ayrılmaz bir ikiliyle söylersek "et ve tırnak" gibidirler. Tek tek anlamlarına göre daha güçlüdür ikizler. Bu nedenle kimi zaman bir filme, bir kitaba ad olur, kimi zaman bir şiirin en vurucu dizesidir. "Eğitim-Öğretim" ikizliği de böyledir. Belki de en yaygın ikizlerdendir, biri olmazsa diğeri öksüz gibilerden. Bu nedenle de çoğunlukla biri diğerinin yerine kullanılır. Hatta yanlış kullanılır. Ancak öyle iç içelik vardır ki yanlış bile kullanılsa algıda sorun yaratmaz. Çünkü eğitim öğretim tek nefeste kullanılır. Tek nefes ikizleri gibi. Öyle olduğu içindir ki

yazarken eğitim mi demeliyim öğretim mi ayrımını önemsemeyeceğim.

Ama kısaca aralarındaki farkı ve ilişkiyi betimleyecek bir örnek verelim. Bir tarihte bir dershanenin hazırladığı sorular içinde şöyle bir küme sorusu vardı. "Halk otobüsü … bölgesinde şarampole yuvarlandı. Muavin ve altı yolcunun kolu, on iki yolcunun bacağı kırıldı. Kolu ve bacağı kırılan yolcuların sayısı beş ise…" Soruyu gösterdiğim bazı arkadaşlar gülerken, birçoğu "yazık" demenin kabacasını söylemekten kendisini alamadı. Soru yazarı (!) öğretmek için ilginçlik yaratıyor, eğitim adına sıfır çekiyordu. Bu kaba örneği eğitim ile öğretim ayrımını vurgulamak adına zaman zaman kullanırım. Öğretim bir disiplinin, bir zaman aralığında, bir programa bağlı olarak, daha çok okul dediğimiz öğrenim ortamında kavratılmasını hedefleyen, biçimlendirilmiş, planlı bir etkinlikler bütünüdür. Kazanımları "bilişsel bilgi"ye ulaşmak için belirlenir. Eğitim ise öğrenmelerin içselleştirilmesi, kişinin fiziksel ve duygusal yaşamında değişiklikler yaratılması sürecidir biçiminde özetlenebilir. Kazanımları duyuşsaldır. Öğrenim alanı okul ve okul dışı alanlardır. Yani eğitim kapsam olarak çok daha geniştir ve öğretimi de kapsayan bir kavramdır. Ayrıntılı incelendiğinde farklılıkları konusunda çok daha fazla şeyler söylenebilir. Ancak ne söylersek söyleyelim hangisinin nerede bittiği, diğerinin nerede başladığı konusu hep tartışılabilir. Özellikle biçimlendirilmiş öğretimde...

Tanımların kısa ve özlü olması tercih edilir. Elbette anlaşılır da olmalıdır. Ama tanım mıdır, betimleme midir, birçok kez o da karışır. Tanım olup olmadığı çok önemli olmayan şöyle bir ifade kullanılır eğitim için; "eğitim, yeni insanı yaratma etkinliğidir." Bu söylem, "eğitim-öğretim yeni insanı yaratma etkinliğidir" biçiminde de ifade edilebilir. Yarattığı algı yönüyle bakıldığında hemen herkesçe anlaşılır; çoğulcu ve toplumsal duyarlılık yönüyle de olumludur. Genel anlamda iyi, becerikli, kültürlü… insan. İdealist algı bu. Huzur verici, rahatlatıcı…

Yukarıdaki tanıma (ya da anlatıma) itirazların yapılabileceğini, eksik bulunabileceğini biliyorum. Ama bir şey daha biliyorum ki kim hangi tanımı yaparsa yapsın hemen hemen her anla-

tımın sonuna "… iyi insan yaratma" eklenir. O nedenle eğitime yüklenen hep olumlu misyondur.

Öyle midir gerçekten? Eğitim iyiyi, güzeli, doğruyu mu hedefler gerçekten? Meramım kime göre iyi, kime göre doğru tartışması değil. Genel kabul ile yeni insan; toplumsal gelişmenin gereklerine uygun, iyiliksever, barışçı, özgürlükçü, hakçı… insan mıdır? Öyle sanıyordum!

EĞİTİMİN MASUMİYETİ

Altı yıllık ilköğretmen okulu öğrenciliğinden sonra öğretmen oldum. Altı yıl boyunca bizlere iyi öğretmen olmanın yanı sıra, yurdu, dünyayı, insanı, insan emeğini, doğayı sevmeyi öğrettiler. Bıkmadan usanmadan "ateş çalıcı" olacaksınız, o ateşi yurdun en ücra köşelerine taşıyacaksınız, belki mum gibi tükeneceksiniz ama ışıtmaya devam edeceksiniz, "öğretmensiniz" dediler. Eğitim, belleğimize, ideal insan yetiştirme olarak kazındı. Oysa yaşamda haksızlıklar, düzenbazlıklar, kötülükler de vardı. Eğitimin hedefi bunlarla savaşmak, bunları ortadan kaldırmaktı. Ama daha ilk adımda hesapta olmayan bir gerçekle karşılaştım.

Bir otobüs yolculuğundayım. Koltuk arkadaşım yörenin insanı. Bir ilçenin sınırlarında yol alıyoruz. Geçtiğimiz diğer yerleri olduğu gibi orayı da anlatıyor. "Hocam" dedi "buranın insanları dilencilikle geçimini sağlar." Güldüm yaptığı şakaya… "Vallah billah hocam." "Bu kazanın bazı köylerinin insanlarının hepsi dilencidir." "Nöbetle İstanbul'a giderler, paraları harman edip dönerler." Beni inandırmaya çalışıyor ve arada "vallah billâh" çekiyor. Hararetli konuşmayı duyan ve koridorun diğer yanında oturan hizamızdaki yolcu da katıldı ikna çalışmasına. "Hocasın galiba bey, arkadaş doğru söyler. Herkes bilir bunu burada. Dilenci parasıyla İstanbul'da apartman dikenler bile var." Başka destekler de geldi. Önümde oturan döndü "ne diyon hocam onların mesleği dilencilik. Gelsin karşına hali vakti senden iyidir. Bilirsin. Ama ne eder eder, senden para alır." Biraz mukallitçe, "hocam vallah onların da hocası var. Dilenci hocası. Tek hoca sen değilsin yani. Sen alfabe öğretirsin o dilencilik…" Bir süre daha bildiklerini ve dilenme numaralarını anlattılar. Kınıyorlar-

dı ama kanıksamışlardı. Bense şaşkındım. Benim bildiğimin dışında da eğitimler ve "hoca"lar vardı. Hem de bu eğitim pek de iyi sayılmayacak bir iş için yapılıyordu. Masum sayılmazdı.

HER ALANDA EĞİTİM

Bu deneyimle eğitimin tek başına bir masumiyet içermediğini öğrendim. Hatta giderek eğitimin insanlaşma sürecinin bir etkinliği olduğu kadar insanlara hükmetme eğiliminin bir aracı olduğunu da öğrendim. İnsan, yaşamı kolaylaştırmak, güzelleştirmek için doğayla mücadele ettiği kadar, "insan"la da mücadele içindeydi. Hatta belki de daha çok… Dün öyleydi, bugün de öyle. Ne yazık ki uygarlaşma yolunda ilerleyen insanın örgütlenme gereksinimi, en ilkel dönemlerden başlayarak en olumsuz eğitim alanlarını yaratmıştı: "savaşçı eğitimi". Adına "savaş sanatı" da dense, sonuçta "adam öldürme sanatı" idi. Ama öte yandan da yine eski çağlardan beri resim, müzik, beden ve güzel konuşma (retorik) gibi sanat eğitimi ile felsefe, astronomi, matematik, fizik, coğrafya gibi bilim alanlarına yönelik eğitim süregelmiştir. Doğayla savaşımın ve estetik duyguların yanında insanın en eski reflekslerinden biri de tapınma duygusudur. Önce sihir ve büyücülükle başlayan ve giderek önce çok tanrıcılığa, sonra tektanrıcılığa evrilen tapınma duygusu farklı bir eğitim alanı ortaya çıkarmıştır: Din eğitimi. Tüm bunlara mesleki eğitim, yabancı dil eğitimi vb gibi eklemeler yapılabilir. Tüm bunlar şunu gösteriyor ki yaşamın her alanında eğitim var. Ve neredeyse (en azından anne baba olarak) herkes eğitimci. Sonuç olarak köylü arkadaşın söylediği gibi tek eğitimci ben değildim. Ne yalan söyleyeyim daha ilk yılımda bu yargıya varmak zoruma gitmişti.

HERKES EĞİTİMCİ

Herkes eğitimci ise ben neydim? Yıllarca niçin eğitilmiştim? Tarih öğretecektim, matematik öğretecektim, resim öğretecektim. Başkaları da öğretiyordu. İnsana saygıyı, hakça davranmayı, ağacı sevmeyi öğretecektim. Başkaları da öğretiyordu. Hatta baş-

kaları benden farklı olarak benim öğretmeyeceğim, öğretemeyeceğim şeyleri de öğretiyordu. Çok geçmeden onu da öğrendim. Başkaları günün gerektirdiklerini anlatıyordu, ben gerekecekleri. Başkaları önlerine çıktıkça anlatıyordu ben biçimlendirilmişi. Başkaları eğitiyordu, ben hem öğretiyor hem eğitiyordum. Çünkü ben öğretmendim, eğitimciydim. İşim buydu. Başkalarının yapamadığını yapmalıydım. Öğretirken, insanlaşma sürecine katkıda bulunmalıydım…

Yıllar önce bir lisede matematik öğretmeniyim. İşlediğim konu insana saygı göstermek ile birleşti. Düşüncelerimi söyledim. Öğrencilerle tartıştık. Bir öğrencim; "hocam söyledikleriniz çok güzel, çok hoşumuza gidiyor. Ama be hocam ben okuldan çıkıp otobüse binerken beni itmeye başlıyorlar" demişti. Haklıydı ve öyleydi, üzülmüştüm. 30 yıl sonra o öğrencimle karşılaştık. Bu konuşmayı birebir anlattı. Arkasından da ekledi; "hocam otobüse kimseyi itmeden biniyorum". Bunu duymak beni mutlu etti. 30 yıl sonra "davranışa dönüşen kazanım" ölçüsü başarılıydı. Öğretimle eğitimin bir farkı da bu. Öğretimle ilgili başarıyı birebir ölçebilirsiniz. Sınavlarla, ödevlerle ya da doğrudan sorarak. Oysa davranışı yani eğitimle ilgili başarıyı ölçmek neredeyse olanaksız. Bir düş gibi. Yıllar sonra gerçekleşeceğine inandığınız ama öteleyemeyeceğiniz bir düş… Kırıklığına hakkımız olmayan düş…

ÖĞRETİM ETKİNLİĞİ

Yukarıdaki saptamaları daha geniş perspektifle, yani eğitim perspektifiyle yaptık. Öğretimi de özet olarak, saptanan bir disiplinin (ders diyelim), bir program çerçevesinde, uygun yöntem ve metotlarla ve uygun eğitim ortamında, yetkin kişilerce (öğretmen), öğrenciye kavratılması etkinliği olarak ifade ettik. Öyleyse öğretim etkinliğinin üç ana unsuru; **Öğretim Programı** (müfredat), **Öğreten** (öğretmen) ve **Öğrenen** (Öğrenci)dir. Bu üç ana unsurdan birindeki aksama öğretim etkinliğini sekteye uğratır. "Müfredat" uygun değilse veya "öğreten" nasıl öğretileceği konusunda yetkin değilse ya da "öğrenen" niçin öğrenmesi gerektiği konusunda hazır değilse öğretim etkinliği sorun olup çıkar. Öğretim etkinliğindeki aksama, öğrenilenlerin içselleşmesi, yaşam için

araca dönüşmesi, bireyin davranışlarına katkısı yani eğitim etkinliğinin gerçekleşmesi yönüyle de istenilen kazanımları sağlamaz.

"**Öğretim programları**" özel uzmanlık alanı. Programcılar; ilgili öğretim kademesinde (lise, ortaokul vb) okutulacak tüm dersleri ve öğretim süresini göz önünde bulundurarak ilgili dersin konularını ve konuların sınıflara dağılımını saptar. Bunu yaparken, konuların öğrenme dizgesini, konulara ayrılacak süreyi, belirlenen öğretim süresini, uygulama koşullarının olup olmadığını, öğrencilerin öğrenme süreçlerini vb. göz önünde bulundurur. Elbette başka ülkelerin uygulamalarını, ülkenin kendi deneyimlerini gözetir, alandan gelen öneri ve eleştirileri de alır. Bu denli ayrıntısı olan öğretim programını hazırlamanın ne denli zor olduğu açıktır. O nedenle program özenle hazırlandıktan sonra sınanmış iyileştirmeler dışındaki müdahaleler her zaman risklidir. Oysa ülkemizde hele de son yıllarda ne yazık ki neredeyse her milli eğitim bakanı kendi programıyla gelmektedir.

İkinci ana unsur olan "**öğretmen**"e gelince… Öğretmen, belirlenen öğretim programını, belirlenen yöntem ve tekniklere göre, kendisine sunulan eğitim ortamında uygulamaktan yükümlü olan kişi. Dikkat edilirse bunların hiçbiri öğretmenin donanımı ile ilgili değil. Hepsi öğretmenin dışsalında. Programın iyi, yöntem ve tekniklerin doğru, öğretim ortamının uygun olması koşullarında ancak öğretmenin donanımı ve yetenekleri önem kazanır. Kaldı ki öğretmenin akademik ve mesleki donanımı ile yeteneklerinin geliştirilmesi öğretmen yetiştirme politikalarına bağlıdır. Yani onlar da bir ölçüde dışsaldır. Diğer yandan öğretmen tüm toplumu ilgilendiren eğitim etkinliğinde toplumla doğrudan yüz yüze gelendir. Genellikle de aksamaların kaynağı olarak görülür. Bir de toplumda yaygın olan "bugünün öğretmeni …" diye başlayan (bunu eski öğretmenler de yapmaktadır) yakınmalar var ki bu da en önemli haksızlıklardan biri. Bu sorun da öğretmen yetiştirmeyle ilgili. Oysa ülkemizin öğretmen yetiştirme deneyi çok zengin. Başka ülkelerin uzmanlarının gelip inceleme yaptıkları kadar zengin…

Öğretim etkinliğinin üçüncü ana unsuru yani "**öğrenen**", etkinliğin öznesidir. Ama neden öğrendiğini, neden öğrenmesi gerektiğini en az bilendir. Daha ilkokula başlarken büyükleri

onu okula göndermiştir. En azından ikna (!) etmiştir. Çaresiz gider… Öğretim ortamı onun hoşça vakit geçirdiği ve öğrendiği ortam olarak düzenlenir. Daha çok buna kafa yorulur. Yanlış bulmuyorum. Ancak eksik buluyorum. Elbette çocuğun sıkılmadan öğreniyor olması sağlanmalıdır. Ancak bu fiili bir durum. Okula gitmek "zorunluluğu"ndan kaynaklanan bir iyileştirme. Okula başlama yaşlarında kısmen bir zorunluluk olsa da ileriki sınıflarda ve özellikle lise döneminde öğrenci neden o sırada oturduğunu bilmelidir. Lise öğrenimini meslek edinmenin ya da yüksek öğrenimin alt basamağı olarak gören öğrenci elbette liseyi angarya olarak görecektir. Bunun yolu da her dersin yaşamda gerekliliğini, bir bilim dalı olarak önemini, bilimin insanlaşma çabasında katkısını kavramasıdır. Bu nedenle öğretim etkinliğinde teknolojiden çok bilinç, öğretim yöntemlerinden çok öğrenme isteği öne çıkarılmalıdır. Ve bu iş okullarda yapılmalıdır. Çünkü öğrenmenin merkezi okuldur.

OKULDA ÖĞRENME

Okullaşma milat öncesi yıllara değin uzanır. Elbette bazı farklarla. Örneğin eğitim ortamlarında eğitim yöntemlerinde farklar vardı. Ama asıl fark, eğitim öğretimin kitlesel olmamasındaydı. Devlete bağlı eğitim kurumları, devlet adamı, asker yetiştirme gibi devletin gereksinimlerine göre düzenlenmişken, devlete bağlı olmayanlar daha çok "meraklı" olanlara yönelikti. Yani geçim derdi olmayan, daha "kültürlü" olmak isteyen kesime yönelikti. Asker ve devlet adamı yetiştirmek dışında eğitim konuları; resim, müzik, retorik (güzel konuşma) gibi sanat içerikli, felsefe, matematik, astronomi, coğrafya gibi kültür içerikli ya da muaşeret kuralları, şiir gibi görgü içerikli alanlardı. Sonuç olarak da eğitim "elit"in, bir anlamda aylakların işiydi. Asilzadeler için daha çok saraylarda lala, mürebbiye vesaire ile sürdürülen bireysel eğitimin de elbette kitlelerle ilişkisi yoktu. Ayaktakımı olarak nitelenen geniş halk kesimlerinin ise bunlara hiç gereksinimi olamazdı. Talepleri de yoktu. Aydınlanma dönemine yani 18. yüzyıla değin. Ne zaman ki ayaktakımı yönetmeye de talip oldu, kitlelerin "eğitim hakkı" gündeme geldi. Geniş halk yığınlarının

eğitilmesinin yolu birebir olamayacağına göre, öğrenme okullarda olmalıydı. Kitlelerin eğitimi sürecinin yaygınlaşması insanlık tarihinin, çağdaşlaşmanın en önemli adımlarından biridir.

Küçük bir "okumuşlar" (elité) grubuna sahip olmak için, geçmişin toplumlarında, çoğunlukla başarıyı yordama ve yetenekliyi seçme yollarına başvurulmuştur. Çağdaş toplumlarda ise, daha geniş kitlelerin eğitilmesine ve bireyleri en az 10-12 yıl gibi uzun sürelerle okula devam etmeye zorlayan yasal ve diğer toplumsal yaptırımlarla böyle bir sonucun sağlanmasına öncelik verilmektedir.

> Eğitime ve okula böylesine büyük bir önem veren ve bireylerin uzun bir süre boyunca okula devamını isteyen bir toplum, birey için eğitimi çekici ve anlamlı bir hale getirme yollarını da bulmakla yükümlüdür. Çağdaş toplumlar yetenekliyi seçmekle yetinemeyecekleri için yeteneği geliştirme yollarını bulmak zorundadırlar. (Benjamin S. Bloom, *İnsan Nitelikleri ve Okulda Öğrenme*, Çev: Durmuş Ali Özçelik, M.E.B. Yayınları Öğretmen Kitapları Dizisi, s. 20)

Okulda eğitimin gündeme gelmesi, beraberinde; "kim eğitilecek", "kim eğitecek", "neler öğretilecek", "nasıl öğretilecek" sorularını getirdi. Ancak öyle sorulardı ki bunlar, molekülün yapısı nedir, dünya güneşin etrafında kaç günde dolaşır, üçgen kaç kenarlıdır gibi yanıtları kolayca verilebilen sorulardan değildi. Girdileri çoktu; insanın bedensel ve zihinsel gelişimiyle, öğretileceklerin dizgesi ve süresiyle, öğretenin nasıl olması gerektiğiyle, hangi ortamda öğretileceğiyle… ilgiliydi. Yanıtlar değişime ve tartışmaya açıktı. O nedenle bu soruların yanıtları günümüzde bile hâlâ tartışılmaktadır. Tüm bu tartışmalar uygulamayla birlikte yeni soruları ve saptamaları getirmeye de açıktı. Dil ve algı ilişkisi, sosyal çevre farklılıklarının öğrenmeye etkisi, gelişen teknoloji ve öğrenme ilişkisi, bilimdeki gelişmeler, çevre değişimleri, çevrenin artan önemi vb.

Ülkemizde de Türkiye Cumhuriyeti daha kuruluş aşamasında eğitimi çağdaşlaşmanın en temel adımı olarak ele almıştır. İlk Milli Eğitim Şûrası savaş yıllarında toplanmıştır. "Sakarya Savaşı'nın başlamasından bir ay önce Ankara'da, 16-21 Tem-

muz 1922 tarihleri arasında Maarif Kongresi toplandı. Mustafa Kemal, cepheden gelerek kongreyi açtı. Anadolu'nun her tarafından gelen 250 dolayında kadın-erkek öğretmenin katıldığı kongrenin gündemi iki ana konuyu içeriyordu: 1) İlk Mekteplerin programları ve eğitim süreleri, 2) Orta öğretim programları ve dersleri…" (Necdet Sakaoğlu, *Cumhuriyet Dönemi Eğitim Tarihi*, İletişim Yayınları, s. 16) Savaş yıllarında Maarif Kongresi toplamak anlamlı olsa gerek… Bu önem devam eden yıllarda artarak devam etmiştir. Çünkü bağımsızlık savaşının kazanıldığı yıllarda halkın yüzde 95'i okuma yazma bilmemektedir ve okullar yok denecek kadar azdır. Çağdaş ülke olmanın koşullarına uygun olarak okullaşmaya hız verilir, çağdaş eğitimi sırtlayacak öğretmenler yetiştirilir, eğitim programları düzenlenir. Çünkü kitleselleşen eğitimin merkezi okullardır.

Tüm dünyada Avrupa Aydınlanması ile başlayan okullaşma beraberinde araştırmaları, düzenlemeleri ve arayışları getirdi. O gün bu gün bu araştırma ve tartışmalar devam etmektedir. Eğitim-öğretim toplum yaşamıyla o denli iç içedir ki, toplumsal gelişmelere bağlı olarak sürekli yenilenmektedir. Kitle eğitimi için tek yol olarak kabul edilen okulda eğitim kendi içinde sorunları da (kaçınılmaz olarak) barındırmaktadır: Öğrenciler arasındaki ön öğrenme farklılıkları, öğrenme hızları ve öğrenme yeteneklerinin farklı olması, öğretim programlarında ve yöntemlerinde yapılan zorunlu değişiklikler, öğrenme ortamlarındaki farklılıklar, öğretmen yetiştirme sorunları ve öğretmenler arasındaki bireysel farklılıklar gibi. Bu sorunların nihai çözümü var mıdır sorusunun yanıtı bana göre; "hayır." O zaman doğru çözüm; eğitim öğretim etkinliğinin "kendini düzeltme gücü"ne sahip olmasıdır. Bu nedenle "bulunmaz", "en iyi", "ideal yöntem" gibi ajitatif saptamalardan çok genel ilkelerden hareket etmek ve değişime açık olmak en doğru olanıdır.

Okulda öğrenme başarısını etkileyen en önemli unsurlardan biri de dil öğrenimidir. Öğrenciye öğretim etkinliğinin ilk yıllarında iyi bir dil eğitimi verilmelidir. Dil, düşünmeyi ifade etme aracı olduğu kadar, "düşünme" eylemini, mantığı geliştirici bir araçtır. Bu nedenle dil ile düşünme arasındaki kopmaz bağ, dili

diğer disiplinlerin öğrenimi için de zorunlu bir öğrenme alanı olarak ortaya koymaktadır. Kısaca iyi bir dil öğrenimi "okulda öğrenme"nin zorunluluklarından biridir. Bu genel anımsatmalardan sonra okulda bir konunun öğrenilmesinde hangi basamaklar kullanılır sorusunu da özetle ele alalım.

KONUNUN ÖĞRENME BASAMAKLARI

Bir konunun öğrenme öğretme süreci üç aşamada ele alınır. Birinci aşama "öğrenmeye hazırlık" , ikinci basamak "öğrenme", üçüncüsü ise "ölçme değerlendirme"dir.

Öğrenmeye hazırlık:

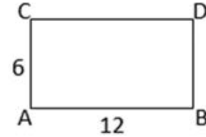


Yeni bir konunun öğrenilmesinin ilk aşaması öğrenme hazırlıklarıdır. Bu aşamanın hedefi öğrencileri bilişsel ve duyuşsal yönden yeterli hale getirmektir. Öğrenmenin önündeki en büyük ve en genel engel ön öğrenmelerin yetersizliğidir. Bilişsel yetersizlik diye ifade ettiğimiz bu engel, öğrenme motivasyonunu da bir başka deyişle duyuşsal hazırlığı da engellemektedir. O nedenle bu aşamada bilişsel yönden; öğrencilerin ön öğrenme farklılıkları saptanmalı, giderilmelidir. Koşut olarak da duyuşsal yönden; konunun önemi, yaşamsal ve düşünsel gerekliliği, daha sonra öğrenileceklere katkısı gibi ikna edici çalışmalar yapılmalıdır. Ancak ne yazık ki konu yetiştirme ve anlatma kaygısı bu aşamanın çoğunlukla gözardı edilmesine

yol açar. Öyle olduğu içindir ki öğrenci ön hazırlık yapılmadan yeni konuyla karşılaşır. Bu da öğrenmeye karşı önyargılı davranmaya ve ürkekliğe neden olur. Bu arada, konuları yetiştirme kaygısıyla öğrenmeye hazırlık aşamasının pas edilmesini doğru bulmadığımı belirtmeliyim. Konuya bir an önce başlayarak kazandığımızı zannettiğimiz zaman, ileri aşamalarda daha çok kaybedilen zamana dönüşmektedir. Öğrenmedeki kayıp ise cabası. Söylediklerimizi biraz açalım. Öğrencilere aşağıdaki gibi bir ön hazırlık ödevi verilebilir. Belki de daha iyisi buna ön hazırlık ödevi yerine hazırlık çalışması demek. Bir örnek olarak verdiğimiz bu ön çalışma örneği sanırım ortaokul öğrencileri için daha uygun. Bazı değişikliklerle lise öğrencilerine de verilebilir.

KONU: SİLİNDİR
Ön öğrenmeler: Dikdörtgen ve daire
Hazırlık Ödevi

Şekildeki verilere uygun dikdörtgen şeklinde bir karton alınız.



1) Dikdörtgenin çevresini hesaplayınız.
2) Dikdörtgenin alanını hesaplayınız.
3) AC ve BD köşegen uzunluklarını hesaplayınız.
4) Kartonu kıvırarak AC ile BD'yi çakıştırıp yapıştırınız.
5) Oluşan şeklin tabanının ne olduğunu söyleyiniz.
6) Tabanın çevresini söyleyiniz.
7) Yan yüzeyin alanını söyleyiniz…

Bu ödev ev ödevi olarak, bireysel ya da grup çalışması biçiminde verilebilir. Hatta en iyisi grup çalışması. Grup oluştururken başarılı ve başarısız öğrenciler karması yararlı olur. Elbette öğrencilerin bir araya gelebilme koşulları göz önünde bulundurulmalı.

Bu çalışmanın yararları: Ön öğrenmeleri pekiştirir. Ön öğrenme eşitsizliğini azaltır. İşlenecek konuya ilgiyi artırır. İşlenecek konuyu kolaylaştırır. Öğrenmeyi kalıcılaştırır.

Bu ödevi hazırlarken öğretmen kendisine şu soruları sormalı:

1) Ön öğrenmeler için yeterli mi?
2) Eski bilgileri pekiştiriyor mu?
3) Yapılandırmacı yönteme uygun mu?
4) Yaratıcılığı geliştiriyor mu?

Öğrenme:

Öğrenmeye hazırlık aşaması nitelikli ele alınmışsa öğrenme kolay, anlamlı ve kalıcı olacaktır. Bu aşamanın en temel yanı öğretim hizmetinin yeterli olmasıdır. Öğretim hizmeti kavramı; derslik ortamını ve derslikte kullanılan yazma alanı, afiş, tablo varsa yapılacak deneyleri vb. ile hazırlanan ders dokümanlarını, planları, uygulanacak ders içi ödev ve yazılı uygulama çalışmaları ya da grup çalışması vb. yöntemleri kapsamaktadır. Elbette bu çalışmalar öğretmen rehberliğinde (olabildiğince) öğrenciyle birlikte yapılmalıdır. Ancak o zaman "öğrenci merkezli" denilen ders etkinliği gerçekleşebilir.



Hazırlık aşamasında verdiğimiz örnekten devam edersek, yapılan hazırlık çalışması öğrenme aşamasında anlam kazanacaktır. Çalışmaların öğrencilerce sunumu sonucunda cisim kavramı ile silindirin alan ve hacminin hesaplanmasına kolayca ulaşılabilecektir. Bu koşullarda bilgi anlamlı ve kalıcı hale gelecektir. Ulaşılan sonuçların ardından oluşturulacak olan silindirin taban alanı, yanal alanı, boşlukta kapladığı yer ile ilgili uygulamalar birer pekiştirme çalışmasıdır. Kavramsal düzeyde gerçekleşen öğrenmenin devamında, deneysel çalışmalarla birleştirilen kesik silindir oluşturma ve öğrenme etkinliğinin vazgeçilmezi olan karşılaştırma sorularıyla sentez düzeyinde öğrenmelere geçilmesi olanaklı olacaktır. Yine ders içeriğini güçlendirici ilginç akıl yürütme soruları (10 litrelik kap süt ile dolu. Ayrıca elimizde 5

litrelik ve 3 litrelik iki boş kap var. Sadece bu kapları kullanarak 4 litre süt nasıl elde edilir) ile öğrenmenin kalıcılığı sağlanabilir. Ya da eş hacimli iki bardağa konulan kum ve su ağırlıklarının farkı ile hem disiplinler arası öğrenmeye hizmet edilir hem de anlamlı öğrenmeye bir başka destek sağlanabilir. Ve de öğrenme gerçek anlamda daha kısa sürede gerçekleşecektir.

Bu aşamada bir vurgu daha yapmayı gerekli görüyorum. Yazdıklarım incelediğim kitaplara, araştırmaya dayanıyor elbette. Ama onları bir şablon olarak aktarmıyorum. Kitap sayfalarında kalacak idealler değil bunlar. Yazdıklarım aynı zamanda uyguladıklarım ya da uygulandığını gördüğüm örnekler. Örneğin logaritma konusunu işleyeceğim ders öncesi uygun zaman gözeterek öğrencilerime, "$2^y = x$ fonksiyonunun tablosunu yaparak grafiğini çiziniz" biçiminde bir ödev verdiğimde geri dönüşü neredeyse her zaman almışımdır. Belki ikna edebildiğim için, belki öğrenciler çabama saygı duyduğu için. Bu nedenle bu tür ödevler; 1) yapılabilir düzeyde olmalı, 2) öğrenciler yararlı olduğuna inanmalı. Bu süreç içinde alışkanlık haline gelecek bir tutum. Öğrenciler başlangıçta direnmeye de çalışır. Ne zaman ki daha kolay öğrenmeye başlar o zaman sizinle işbirliğine yanaşır. En çok zorlanıldığı koşullarda ödev teşvik edici bir ölçme aracı olarak da değerlendirilebilir.

Ölçme değerlendirme

Ölçme değerlendirme genellikle "öğrenciye not verme" yani öğrencinin öğrenme düzeyini ölçmeye sıkıştırılmaktadır. Bu nedenle de sınavlar konu bitiminde yapılmaktadır. Oysa gerek hazırlık gerekse ölçme dediğimiz aşamalar dersin işlenişi ile iç içedir ve onun kadar önemlidir. Çağdaş eğitim anlayışına göre ölçme, "öğrenciyi ölçme"den önce "öğrenmeyi ölçme" işlevselliğini taşımalıdır. Öğrenmeyi ölçme ise hem öğrencinin başarı ölçüsünü hem de öğretmenin kendi başarısını ölçmeyi kapsar. Ayrıca bir sonraki aşamaya da ön hazırlık işlevselliği vardır. Ölçme araçları; izleme testleri, yazılı-sözlü, kısa-uzun yanıtlı sınavlar, bireysel ya da grup ödevleri vb. dir. Dersin ve konunun özelliğine göre bunların tümü veya birkaçı kullanılır. Ve öğrenme sürecinin tüm aşamalarına yayılarak…

Örneğin, ön hazırlık çalışmasında ölçme, ödevi teşvik ötesinde harcanan emeği ödüllendirme işleviyle bir anlamda objektiflik de içerir. Çünkü eğitim öğretim etkinliğinin dört temel hedefi olan bilişsel, duyuşsal, psikomotor ve sosyal gelişim öğelerinin hepsi ön hazırlık çalışmasında vardır. Bilimsel çalışma ilkelerinin öğrenilmesi de cabası… Bu temelde yapılan ölçme ve değerlendirme salt bilişsel gelişmeyi ölçen konu bitimindeki sınavlardan hiç de az öneme sahip değildir.

Yukarıda "okulda öğrenme"nin üç temel aşamasını basitçe ve senaryolaştırarak ele aldık. Elbette öğrenme basamakları daha ayrıntılı ele alınabilir. Gerek dersin işlenişi, gerekse ödevlendirme, gerekse ölçme değerlendirme ve de dönüt ve düzeltme ile ilgili birçok şey söylenebilir. Hatta o zaman öğrenme etkinliği epey karmaşık hale gelebilir. Öyledir de gerçekten. Eğitim öğretim etkinliği hem oldukça karmaşık hem de oldukça basittir. (Karmaşıklığı sürecin aşamalarının planlanması ve hakkıyla uygulanması anlamında kullanıyorum.) Eğer ödev angarya olmaktan çıkar, ölçme de aşamalara uygun olarak dağıtılır ve ön öğrenmelerin pekiştirilmesi amaçlı da kullanılırsa kazanımlar gerçekleşecektir. Bu anlamda da basitlik, kalıcılık ve derinlik ilkelerini içeren verimli bir etkinliğe dönüşecektir.

Bunlar olması gerekenlerin özeti. İyi bir öğretim programı, doğru öğretim yöntemleri ve uygun öğretmenler varsa bunların gerçekleşme koşulu var demektir. Koşulun gerçekleşmesi ise sürecin doğru değerlendirilmesiyle olanaklıdır. Süreç içinde neler yaşanabilir? Kısaca gözden geçirelim. Hem kişisel yaşanmışlıklarla hem de genel yaşanmışlıkla...

-II-
SÜREÇTE YAŞANANLAR

Yıllar önce bir lisede matematik öğretmeni olarak ilk kez göreve başladım. Matematik öğretmek üzere eğitim almıştım ve diplomam vardı. Anlatacağım konuları da biliyordum. Hatta anlatacağımdan fazlaca. Eh nedir o zaman? Gider anlatırsın öğrenci de öğrenir! Öyle miydi, basit miydi bu denli? Öyle değildi ne yazık ki. Anlatıyordum ama kolay öğrenemiyorlardı. Nedendi peki? Bir kere öğrenci sıcak değildi matematiğe karşı. Çoğunlukla da ürküyordu. Hani "önyargı" diyoruz ya işte öyle… Önyargı mıydı neden gerçekten? Nedeni "önyargı" olarak belirlemek sorunu öğrenciye yüklemek değil miydi? Öğrenme zorluğu yaşıyorsa, "önyargıların var o nedenle öğrenemiyorsun" demek ne ölçüde eğitimcilikle bağdaşırdı? Kendi kendine mi oluşuyordu bu önyargılar? Hırsızın hiç suçu yok muydu? Yani müfredatın, yani öğretim yöntemlerinin, yani matematiğin zorluğunun, yani benim… Sorular, sorular, sorular… Zorlanıyordum. Ama yine de şanslıydım. Tek tek konuların nasıl öğrenileceğini yeterince beceremesem de bana "öğretmelisin" demişlerdi. Hatta "hangi zorluklarla karşılaşırsan karşılaş"la birlikte…

Beni eğitenlerin tembihlerinden biri hatta en önemlilerinden biri; "ders planın mutlaka olmalı… Yetmez, kendi ders notların olmalı; yetmez, derse elinde notlarla girmelisin; yetmez, uygu-

lama sorularını önceden hazırlamalısın…" Ders planlarım vardı. Onları arkadaşlarımla birlikte hazırlıyorduk. Zaten elimizde müfredat da vardı. Konuları sıralıyor, saatleri ayarlıyor, imzalıyor ve arşivlenmek üzere okul yönetimine veriyorduk. Plan da tamam. Ders notlarına gelince, o yıllarda çok fazla kaynak yok. Programa göre düzenlenmiş ders kitabı var. Ders kitabını esas alarak ders planı yaptım. Kitaptan pek farkı yok. Kitabın özeti gibi. Yani "bana ait" değil. Kitabın benzeri ise, ne gereği vardı? Kitapta yazılanları aktarmakla matematik öğrenilse zaten sorun olmazdı. Bu kez ders notlarını yeniden hazırlamaya giriştim. Biraz gözlem, biraz öğrencilik yıllarına dönerek, biraz matematikçiler dayanışmasıyla. İyiydi. En azından iyiye doğru gidiyordu. Ancak bu kez de başka bir engelle karşılaştım. O yıllarda liseyi bitiren öğrencinin üniversiteye giremese bile bir yerlerde iş bulma olanağı (azalsa da) vardı. Ama kısa sürede değişti. Lise diploması tek başına yetmez oldu. Öğrenci üniversite okumak zorundaydı. Üniversiteye hazırlık furyası başladı. Benim için de, "Üniversite sınavında ispat mı soracaklar, kısa yolu yok mu" itirazıyla boğuşma dönemi... Bu süreçte öğrenciyi matematiksel düşünmeyi öğrenmenin erdemine, yararına ikna etmeye çalıştık. Öyle bir piyasalaşma başladı ki, ikna da yetmez oldu. Hikâye böyle başladı.

O gün bugün bu işin altından nasıl kalkacağımızı tartışmaya başladık. Bileniyle, bilmeyeniyle… Bu kadar matematiğe ne gerek var dedik, müfredatla oynamaya başladık! Eğitim ezberci dedik, öğretim yöntemlerinde çözüm aradık! İyi öğretmen yok dedik, öğretmeni suçladık, öğretmen yetiştirmeyi düzenledik(!). Gençlik sorumsuz dedik, öğrenciyi suçladık. Veliler ilgisiz dedik, veliyi suçladık. Açıkça bir karmaşaya doğru sürüklendik. Karmaşa bir piyasa yarattı. Yanında da pazar. Bırakın matematikçi olmayı, işletmeci, mühendis hatta üniversite öğrencisi kitap yazdı. Bu kitapların bazılarında elipsin çevre uzunluğu $\{Ç=\pi(a+b)\}$ yanlış formülüyle bile hesaplandı. Bin yıldır yapılamayan... Birileri, analitik geometride determinantla (!) üçgenin alanını hesapladı. Birisi, "öyle bir geometri buldum ki devleti bunla yönetirsiniz" diye fırladı. Televizyonlarda boy gösterdi.

Bir başkası çıktı, miladi yıllardan beri bilinenleri "benim bulduğum yöntem" diye pazarladı… Hani evlere şenlik denir ya. İşte öyle. Hatta vahim…

Peki, olumlu şeyler yok muydu? Elbette vardı. En azından sorun olduğu konusunda birleşmek bir olumluluktu. Birçok matematikçi, birçok matematik öğretmeni iyi şeyler yapmaya çalıştı. Yaptı da. Örneğin 10 yıl önceye dek az bulunan matematik kitapları bugün oldukça fazla. Kitap dediysem yukarıdakilerden değil. Akademik-popüler matematik kitapları. Şirince'de bir matematik köyümüz var. Dünyada örneği var mı? Sanmıyorum. Ya da Eskişehir Anadolu Üniversitesinin "Matematik Noktası" adıyla açtığı sergi ki sanıyorum onun örneği de dünyada az. Bunlar yeterince değer buldu mu derseniz. Yanıtım hayır. Birileri durumdan vazife çıkarmış, özveriyle kervanı yolda düzeltme çabası içinde. Yine bazı üniversitelerin sürdürdüğü matematik yarışmaları. Bazı liselerin düzenlediği öğretmen öğrenci toplantıları, seminerleri. Elbette benim bilmediklerim sayamadıklarım da vardır. Yakın zamanda posta adresime bir ileti düştü. Başka bir ilden bir arkadaş. Oldukça genç bir bayan öğretmen. Ortaokul seviyesindeki çocuklara matematiği sevdirmek için çalışma yapmak istediğini (ama doğru matematik) yazıyor. Ne katkıda bulunabileceğimi soruyor. Bunlar önemli olumluluklar. Önemli katkılar. Ancak bu katkılar doğrudan kitle eğitiminden çok, matematiğe ilgisi olanlara yönelik. Yani meraklısına! Ama elbette matematik sıcaklığını artırması yanıyla kitlesel yanı da var. Doğrudan okullarda uygulanan matematik çalışmaları konusunda da duyarlı birçok matematik öğretmeninin çalışmaları olduğu da biliyorum.

Yakın dönem süreci özetleyelim. 1960'lı yıllarda dünya eğitim sisteminde "modern matematik ve fen programları" geliştirildi. Bu gelişmeye bağlı olarak da Türkiye, 1967-1968 yılında bu uygulamaya geçti. Ama bu önemli değişiklik tüm okullarda aynı anda uygulanmadı. Önce bazı liselerde pilot uygulama adı altında denendi. Aksamalar ve gerekli iyileştirmeler yapılarak 1976-1977 öğretim yılında da ülke genelinde tüm okullarda "modern matematik programı" adı altında uygulanmaya başlandı. Öğretmenlere modern matematik kursları verildi ve öğretmen yetiştirme

bu programa göre yeniden düzenlendi. Program içeriğinde matematik, geometri ve analitik geometri tek ders olarak yer aldı. Bu program 1991 yılına dek uygulandı.

1991-1992 yılında ülkemizde kredili sistem uygulamasına geçildi. Ders geçmeyi esas alan bu sisteme bağlı olarak öğretim programlarında da değişiklikler yapıldı. Matematik, geometri ve analitik geometri dersleri ayrı ayrı kademelendirildi. Matematik 1, matematik 2, geometri 1… gibi. Ek olarak da ileri matematik 1 ve 2 programları oluşturuldu.

O günden sonra "matematik öğretiminin sorun" olma tartışmalarının artmasına paralel olarak müfredatta adım adım değişiklikler yapıldı. Bu değişiklikler "sorunu müfredatın ağırlığında ve iyi düzenlenmemesinde aramaktan" kaynaklanıyordu. Konuların yıllara göre dağılımı değişti. Konuların sıralaması değişti. Matematik; matematik, geometri, analitik geometri olarak ayrı derslere bölündü. Sonra bu ayrımlardan vazgeçildi. Öğrencinin seçtiği alanlara göre de konu dağılımlarında değişiklikler yapıldı. Yeni konular eklendi, bazı konular çıkarıldı. Daha sonradan yeniden eklendi veya yeniden çıkarıldı. Giderek de "zor" olan matematik "kolay"laştırıldı.

Sorunu çözmek için bir başka arayış alanı olarak "öğretim yöntemleri" seçildi. Bu yöntemlerle öğretilemiyor denilerek, "yeni yöntemler" ortaya konuldu. Etkin öğrenme, proje tabanlı öğrenme, aktif öğrenme, tam öğrenme, öğrenci merkezlilik… Bu söylemler o denli arttı ki, hangisi diğerinden ne denli farklı, hangisi hangisiyle ne denli bağdaşık karıştı. Ama "yenilik" diye sunulanların asıl zararı "eskimiş" denilen olumlulukların da inkâr edilmesine yol açmasıydı. Hatta bu yenileşme, "falanca ülkenin yöntemlerini getirdik"in ötesinde bazı eğitim kurumlarının "biz falan eğitim sisteminin Türkiye temsilcisiyiz" görgüsüzlüğüne dönüştü. Sanki dünyanın bir yerlerinde bulunmaz örnekler varmış gibi… Süreç içinde bu "temsilcilerin" uygulamaları da döküldü.

Birileri de bir başka çözüme sarıldı. Teknolojiyi etkin kullanmak! İnsan gelişiminin ürünü olan teknoloji, matematik öğretimini kurtaracaktı. Sınıf tahtalarının yerini, akıllı olanları aldı. Öğrenci defterlerinin yerini tablet bilgisayarlar, kalem yerini elektro-

nik dürtü araçları. Çocuklar yazmaz, çizmez oldu… Sonuçta öğretimde önemli olan ve görgüsüzce kullanılmadığında yararlı olacak teknoloji hoyratça kullanılmaya başlandı… Yine olmadı.

Matematik müfredatlarında (öğretim programları) arada bir yeni konu ekleme veya çıkarma biçiminde değişiklikler elbette yapılır. Bu doğaldır da. Süregiden öğretimde bazı aksamalar veya eksiklikler saptanır, yararlı olduğu düşünülen değişiklikler uygulamaya konur. Öğretim yöntemlerinde de değişikliklerin, yeniliklerin yapılması doğaldır. Değişikliği yapması gerekenler ise alanın uzmanlarıdır. Değişikliği yaparken başka ülkelerin deneylerinden yararlanmak da doğaldır, hatta gereklidir. Matematik programcıları öğretim programlarını hazırlarken, düşünsel beceriler (soyutlama, nedensellik, analitik düşünme...), yaşamsal beceriler (sorun çözme, uygulama, estetik, iletişim... gibi) ve akademik beceriler (bir sonraki öğrenim aşamasına hazırlık gibi) kazandırmayı hedefler. Hedeflerin belirlenmesinde önemli olansa, kazanımların azlığı-çokluğu değil öğrenmenin derinliği ve kalıcılığıdır. Başarı da kazanımların gerçekleşme ölçüsüne ve kalıcılığında aranır.

Aynı saptama teknolojiyi kullanmak adına da geçerlidir. Teknolojinin hangi ölçüde, ne kadar kullanılacağına da "matematik ve matematik öğretimi"ni bilenler karar verir.

Sonuç olarak gerek öğretim programlarında, gerek öğretim yöntemlerinde ve eğitim ortamlarında değişiklikler yapılır ve yapılmalıdır. Ama şu gerçeği göz ardı etmeden: Türkiye'nin eğitim öğretim alanındaki gerçeği sınavlardır. Bir türlü üstesinden gelinemeyen sınavlar… Başarının ölçüsü de "kaç soru yaptın"la sınırlıdır. Yani öğrenci sınavlarda ne kadar çok soru çözerse o kadar başarılı. Elbette bu durumda düşünsel, yaşamsal, akademik becerilere yönelik bir program ve bu programın derinlikli kalıcı hedeflere yönelmesi kolay değil.

SLOGANLARI AŞMAK

Demem odur ki, yaşadığımız sloganlar dünyasını aşmak gerekir. Yukarıda da belirttiğimiz gibi ortalığı ne olduğu anlaşılamayan sloganlar kapladı: "Öğrencileri ezberciliğe yönlendiren

eski öğretim metotları yerine yaratıcılığı, keşfederek öğrenmeyi esas alan çağdaş öğretim metodu… ve buna bağlı öğretim programları…" , "çağdaş eğitime geçiyoruz", "falanca ülkenin eğitim sistemini getiriyoruz", "öğrenci merkezlilik", "aktif öğrenme", "etkinlik temelli öğrenme", "yaşam becerileri", "tam öğrenme" vb. Bunlar kulağa hoş gelen eğitim literatürünün, araştırmalarının kuramları, sözleri. Ama ne yazık ki, ezberciliğin başka türleri. Ezberlenen birer slogan, birer ajitasyon unsuru. Söylenenlere bakılırsa; "öğrenci bilgiye kendisi ulaşacak, bilgiyi oluşturacak, öğrenme kalıcılaşacak…" Sorun çözülecek. Öğrenciler sular seller gibi matematik öğrenecek. Sloganlarla mı? İnsanın "hayırlı olsun!" diyesi geliyor. Ne de kolaymış eğitimin sorunlarını çözmek…

Öğretmen için en zor iş, öğrencinin "anlamadım" diyen gözlerle bakmasıdır. Bu nedenle bin bir yol dener öğretmen. Adını koymadan… Sloganlara takılmadan. Parlatılarak sunulanların hiçbiri yeni değil. Türkiye'nin matematik öğretmenleri ve tüm öğretmenleri bunları bilir. Öğretmenler bu yöntemleri deneyerek buldular, okuyarak buldular, paylaşarak buldular. Bırakın tüm bunları tarihe bakarak bile öğrendiler. Örneğin çağdaş eğitim yöntemi denilen "yapılandırmacılık". İyi kötü matematikle ilgili herkes Sokrates'in diyalog yöntemini bilir. Sokrates diyaloglarla ön bilgilerden yola çıkarak yeni bilgiyi oluşturma (belki de daha doğrusu oluşturtma) yöntemi izler. *Dost Yayınları*'ndan çıkan *Matematik Üzerine Diyaloglar* kitabında Alfred Reny bunu iyi kompoze etmiştir. "… Bu diyalogda, orijinal Sokrates diyaloglarının yöntemine, hatta diline, mümkün olduğunca sadık kalmaya çabaladım… Diyalogda Sokrates kendi özgün tartışma metodunu uygular; sorularını yönelterek, karşısındaki kişinin konuyu kavramasını sağlar. Dolayısıyla Sokratik diyalog iki farklı bakış açısının çekişmesi değildir, katılanların doğruyu birlikte bulmaya çabalamalarıdır..." Adı yapılandırmacılık olarak konmasa da bilgiye birlikte ulaşma Sokrates'ten bu yana da önemli öğrenme yöntemlerden biri olarak bilinir. Ülkemizde de "yaparak, yaşayarak öğrenme" adı altında benzer yöntem savunulmuş, hatta uygulanmıştır. Birçok öğretmen kendi yaşantıla-

rında benzer yöntemler kullanmış, öğrenmeyi kalıcı kılmanın yollarını aramıştır.

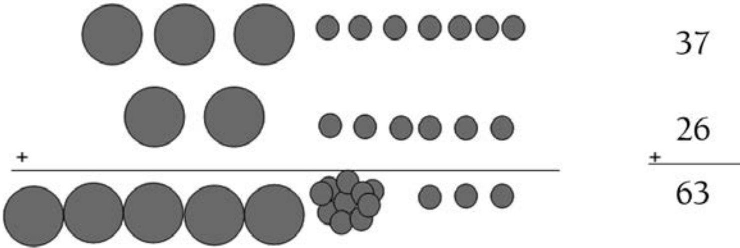
Oldukça eski yıllar. 1969 yılında ilkokul öğretmeniyim ve daha ilk öğretmenlik yılım. 1, 2, 3, 4. sınıfları birlikte okutuyorum. Birleştirilmiş öğretim dediğimiz bu öğretim bugün sanırım pek yok. Küçük sınıfların öğrenmelerinde büyük sınıflardan yardım alıyorum. Küçükler öğreniyor, büyükler de öğretirken öğreniyorlar. Büyükler problem kuruyor, küçükler o problemleri çözüyor. Küçükler Türkçe kitabından metin okuyor, büyükler dinliyor yanlışları düzeltiyor, ne anladığını soruyor… gibi.

O günkü planlamamız şöyle. Ben sınıfta üçüncü sınıflarla ders yapıyorum. Birinci sınıf öğrencileri, sınıfın köşesindeki kum havuzunun başında, öğrendikleri heceleri kum üzerine yazıyorlar. Arada yanlarına uğruyorum onlarla ilgileniyorum. Dördüncü ve ikinci sınıflar bahçede ders yapıyor. Dördüncü sınıflara verdiğim görev, ikinci sınıflara eldeli toplamayı anlatmak. Ama koşulumuz, neden ve niçinler ile anlatmaları. Bu tür görevlendirmeleri de bir plan çerçevesinde yapıyorum ve hazırlık yapmaları için öğrencileri önceden görevlendiriyorum. Bir ara yanlarına gittim. Soru, 37 ile 26'nın toplanması.

Yerde daire içine alınmış 10'ar taneden oluşan taşlar 3 grup, aynı hizada tek tek 7 tane taş. Alt sırada yine daire içinde 10'ar taştan oluşan iki grup ile hizasında 6 tane taş. Karşılarında da 37 ile 26 alt alta çubuklarla yere kazılarak yazılıp altına da toplama çizgisi çekilmiş. Aynı toplama çizgisi taşların altında da var. Dördüncü sınıflar ayakta ve çok ciddi. Dördüncü sınıflardan bir öğrenci taşların, diğeri sayıların başında. İkinci sınıflar çökmüş durumda ve dikkatle izliyor. Diğer dördüncü sınıflar da izlemede.

37
26
\+ \+

Taşların başında olan öğrenci anlatıyor. "Buradakiler onluklar, diğerleri birlikler. Önce bu tek tek olanları toplayıp aşağıya indirelim." Birlikte sayıyorlar. "Kaç oldu; 13. Bu 13'ün içinde bir tane 10 var, bir de 3 tane." Soruyor ardından. "10'luğun yeri neresi?" Küçüklerden yanıt geliyor: "Öte taraf". "10'luğu yerine verelim" diyor ve etrafına düzgün daire çiziyor. "Üç tane yerinde kalsın. Şimdi de yukarıdaki 10'lukları bozmadan indirelim" diyor. Sayıların başında olan müdahale ediyor. "Dur birlikleri sayıyla da yazalım." Şimdi mi sonra mı tartışması yaşıyorlar ve şimdi yazmaya karar veriyorlar. Söz sayıların başında olanda, küçüklerin gözleri onda bu kez. "7, 6 daha kaç yaptı?" Küçükler bir ağızdan yanıtlıyor; "onüüüç." "13 ün 3'ü birlik onu birliklerin altına yazıyoruz, elde var bir." Küçüklerden biri itiraz ediyor "elde on var." İşler karıştı, anlatan şaşırıyor. Bir diğer büyük karışıyor lafa. Çomağı alıp yan tarafa bir daire çizip "demin 10 tane taşı ayırdık ya o bu yuvarlağın içinde 10'luk o, bir tane onluk."



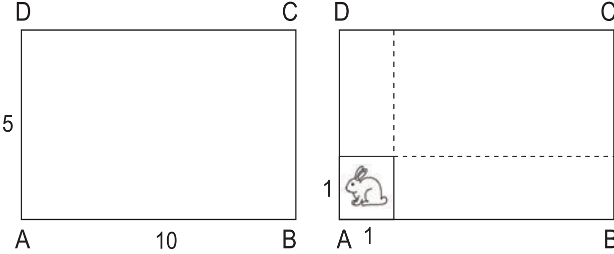
Taşlarla anlatan devam ediyor. Şimdi gözler onda. Alt alta daireler çizip taşları 10'ar 10'ar yerleştiriyor ve soruyor, "kaç onluk oldu?" Yanıt geliyor, "beş tane". Devam ediyor anlatan: "bir de buradan geldi, kaç etti?" "Altı." Sıra sayıların başında olanda…

Bir başka derste tüm okul bahçedeyiz. Okul alçak bir bina. İki öğrenciyi çatıya çıkardık. Yerde kum havuzu var. Öğrencilerden biri kendi atlayacak, diğeri elindeki küçük taşı bırakacak. Diğer öğrenciler de hangisinin önce yere düştüğüne karar verecek. Tabii tahminler yapılıyor. Tahminler öğrencinin önce düşeceği biçiminde. 1, 2, 3 diye komut veriyorlar. Sonra tartışma… Nasıl

olur. Bir kez daha deneniyor ve bir kez daha. Yine aynı şey. Ardından sorular: niye düştüler, neden aynı zamanda düşüyorlar, düşen öğrenci ile taşın yerde bıraktığı iz neden farklı gibi. Sonra da karar verme, yani sonuç…

Yıllar sonra bir ortaokulda matematik öğretmeniyim. Dersim yok. Öğretmenler odasında oturuyorum. Bir ara pencereden dışarı baktım. Bir matematik öğretmeni arkadaşım bir sınıfın öğrencileriyle bahçede. Dışarı çıkıp yanlarına gidiyorum. Arkadaşım memnun. "Gel hocam alanı kavratmaya çalışıyorum, yardım edersin." Ben ne yapılacağını bilmiyorum ama tamam diyorum. Biraz da merakla. Yer beton. Tebeşirle yere bir dikdörtgen çizilmiş. Dikdörtgenin neye göre çizildiğini açıklamak için arkadaşım öğrencilere "nasıl çizdik" diye soruyor. Çocuklar, "sağa doğru 10 metre, yukarı doğru 5 metre alarak" diye yanıtlıyor. Yani çocuklar boyun 10 metre, enin 5 metre olduğunu biliyor. İki öğrenci seçiyor öğretmen, "senin adın boy, hep boy yönünde hareket edeceksin; senin adın da en, sen de en yönünde hareket edeceksin" diyor. Dikdörtgenin köşeleri tebeşirle A, B, C, D harfleriyle adlandırılmış. Görevli iki öğrenci A köşesine geçiyor. Öğretmen her ikiniz de doğrultularınız boyunca birer metre yürüyün ve işaretleyin diyor. Elinde çelik metre olan bir öğrenci yardımcı oluyor. İşaretler konuluyor. Öğretmen devam ediyor, "şimdi aykırı davranın, boy en yönünde, en boy yönünde hareket etsin ve karşılaşsın". Karşılaşıyorlar, karşılaştıkları noktayı paylaşmak için de itişiyorlar. Bu da onların şımarma hakkı! Öğretmen arkadaş sevecen bir biçimde uyarıyor; "hoop, itişmeyin, işinizi doğru yapın." Gülüşüyor diğer çocuklar. Öğretmen de gülüyor ve "şimdi tebeşir alınan yolları çizsin" diyor. Tebeşir, elinde tebeşirle yolları çiziyor. Belli ki öyle adlandırılmış. Bir kare çizildi şimdi. 1'e 1 boyutunda. Adı tavşan yuvasıymış. Bir öğrenci tavşan olup karenin içine çöküyor. "Şimdi en ve boy A köşesine" komutuyla öğrenciler başlangıç noktasında. Öğretmen, "boy 3 metre, en bir metre hareket etsin" diyor. Söylenen yapılıyor. "Şimdi aykırı" demesi yetiyor öğretmenin. En ile boy köşede buluşuyor. Tebeşir alınan yolları çiziyor. Gerisi kolay, 1'e 3 dikdörtgene 2 tavşan daha yerleşiyor. Öğretmen arkadaş son noktaya geliyor, "boy 3,

en 2 metre kaç tavşan yuvası oluşur?" Hemen hareket ve çizimler ve de yanıt; "6 yuva". Artık bu aşamada "birimkare", "dikdörtgenin alanı" birer sonuç. Ha öğretmen özetlemiş, ha öğrenciler.



Elbette burada bitmiyor. DB köşegeni çizilerek, dikdörtgenin yarı alanı yani üçgen alanı, C ve D noktalarına yerleştirilen öğrencilerin boy yönünde aynı uzunlukta kaymasıyla oluşan paralelkenar ve alanların değişmemesi, paralelkenardan oluşturulan üçgen alanlarının yarı alan özellikleri… tek tek uygulanıyor ve sonuçları öğrenciler çıkarıyor. Yıl 1983 ya da 1984. Hangi öğretim yöntemlerinin hangi eğitim kuramlarının uygulandığını varın siz söyleyin.

Bir ya da iki yıl sonra. Bir lisede ikinci dereceden fonksiyon ve ikinci dereceden denklem konularını tamamladık. Pekiştirme çalışması yapıyoruz. Öğrenciler sınıftaki sıraları 5-6 kişilik gruplara göre düzenlemiş. Her grup saptadığımız sürede konu ile ilgili bir soru hazırlıyor. Süre sonunda hazırlanan soruları topluyor ve çözmek üzere başka gruplara veriyoruz. Sorular gruplarda ortak olarak çözülüyor. Elbette gürültü çok. Yer yer hazırlayan grupla çözen grup soru üzerine tartışıyor. Anlaşmazlıkları birlikte tartışıyoruz. Öğrencilerin bir kısmı ayakta. Aniden bir sessizlik oluyor. "Ne oldu" diye soruyorum. Gözler kapı tarafına yöneliyor. Dönüyorum okul müdürü kapıda şaşkın gözlerle bakıyor. Yanına gidiyor sakince "buyurun hocam" diyorum. Otoriter olan müdür daha da şaşkın; "pardon hocam siz yoksunuz zannettim, iyi dersler" diyor ve çıkıyor. Doğal mı buldu, yadırgadı mı bilmiyorum. Biz derse devam ettik. Ders sonunda da sınıfça ödevimizi belirledik. Her zaman olduğu gibi

ders kitabından konu sonundaki sorulardan önce herkesin en az kaç tane çözeceğini saptadık. Kalan soruları ise her öğrenci öğrendiğine inanana kadar çözecekti.

Hemen hemen birkaç yıl sonra… 1987-88 olabilir. Dershanede çalışıyorum. Dershane kurucusu sınıflar için birer novaskop (tepegöz) aldı. Başka bir dershanede yok. Bilgisayar ise bırakın dershaneleri, okulları, devlet dairelerinde bile yok. Çünkü novaskop lüks. Kurucu daha çok reklam olarak bakıyor, nasıl işe yarayacağını o da bilmiyor. Tek söylenen (sanırım satanlar ikna etmiş), testler asetatlı kâğıda basılacak ve yansıtılacak, çok soru çözülecek, zamandan kazanılacak… Başarı "çok soru çözmek" çabasına endekslenmişti. İtiraz ettik. Bize göre matematik hele de geometri ve analitik geometride soruyu yazmak, varsa şekil çizmek, yazarken ve çizerken soruyu algılamak ve çözüm yollarını sezmek vazgeçilmez ilkeydi. Biz ilkelerden ödün vermedik ama novaskopu da kullandık. Örneğin ayırt edici önemdeki sorularda birden çok çözüm yapıyorduk. Her çözümde aynı şekli çizmek gerçekten zaman kaybıydı. Novaskop ekranına çizdiğimiz şekli tahtaya yansıtıyorduk. İlk çözümden sonra tahtadaki çözümü siliyor, ikinci ve sonra üçüncü çözüme geçiyorduk. Ya da çizilmiş grafiği yansıtıyor önce onun üzerinde grafik inceleme yapıyor, silip aynı grafik üzerinde örneğin limit türev tartışmaları yapıyorduk. Ya da bir başka grafikle kesiştirip, kesişim noktalarını tartışıyorduk. Hem zaman kazanıyor hem de çoklu çözümlerle, düşünme esnekliği yönüyle yarar sağlıyorduk. Elbette önceden hazırlıklar yaparak. Novaskop üzerindeki yazma çizme işlerini de kadın arkadaşların değişik renklerdeki göz kalemleriyle yapıyorduk. O da bizim buluşumuzdu.

Çok örnek sıralanabilir. Şimdi düşünelim. Bu örneklerde öğrenci merkezlilik yok mu, aktif öğrenme yok mu, akran öğrenmesi yok mu, yapılandırmacılık yok mu, yaratıcılık yok mu, bilimsel tutum yok mu? Bunlar ve arkadaşlarımdan dinlediğim birçok davranış bizim icatlarımız değil. Bize verilen eğitim… "Etkili öğrenme nedir" eğitimi… Daha genel bir deyişle "adam gibi öğretim nasıl yapılır" eğitimi. Ve tüm bunların özü "öğretme" tutkusunun ve sorumluluğunun yaratıcılığı.

GERÇEĞE DAYANMAK

Elbette geçmişte uygulanan eğitim-öğretim mükemmel değildi. Hatta iyi de değildi. Yukarıdaki örnekler bu ülkedeki öğretmenlerin çabalarından birkaçı. İyi olmayan yanlar hep tartışıldı, yıllarca dile getirildi, eleştirildi. Mevcut yöntem öğrenciyi ezberleyerek öğrenmeye mahkûm ediyor, değişmeli denildi. Kalıcı öğrenme gerçekleşmiyor denildi. Sınava dayalı süreç okullardaki eğitimi olumsuz etkiliyor denildi. Daha birçok şey söylendi, değişmesi için mücadele edildi. Bu mücadeleyi alanda çalışan öğretmenler ve öğretmen örgütleri verdi. Çünkü onlara göre öğrenciye yazıktı. Öğretmene, harcanan emeğe, enerjiye yazıktı. Ülkeye yazıktı… Bu mücadelenin bedelleri de ödendi. Eleştirenlere bozguncu denildi, yıkıcı denildi… Zaman zaman değişiklikler yapılsa bile olmadı, olmadı… Nedenler yönetenlerin beceriksizliğine, siyasi hesaplara, sistemin yapısına bağlı olarak tartışılabilir. Ama konumuz bunu tartışmak değil. Ortaya atılan "düzeltiyoruz" iddiası, iddianın ciddiyeti ve olup olamayacağı. Çünkü bu iddialar yeni değil. Hep söylendi. Bu kadar sık olmasa da! Yanlışların düzelmesi elbette istenir. En çok da onun zorluklarını yaşayan eğitimciler ister. Ama bize göre düzelme olup olamayacağı tartışılmalı. Olacaksa da nasıl olacağı. Üç beş sene sonra aynı laflarla başa dönmemek için tartışıyoruz.

Olur mu? Bu soruyla başlayalım. Yani eğitim öğretim ve bağlı olarak da matematik eğitimi iyi hale gelebilir mi? Yanıtı kabaca şu: Mükemmel olmasa bile iyi hale gelir. Ama yola çıkış yine de mükemmeli aramak biçiminde olmalı. Mükemmeli aramak diyorum. Çünkü mükemmel ütopiktir. Çünkü eğitim öğretim canlı bir organizma gibidir. Yaşam, bilim, bilgi sürekli değişim içinde. Teknoloji ve eğitim ortamları da. Öyleyse sorun, soruna bilimsel yöntemle ve geçmişin deneyleriyle yaklaşmak. Parlak laflarla yıllardır söylenenleri yeniden "söylemek" yerine, bilimsel yöntemi kullanmak. Yani var olanı ortaya koymak, sorunları saptamak, sorunların nedenlerini tartışmak ve çözüm üretmek. Bu perspektifle; yapılan değişiklikleri ve "ne zamandan beri matematik öğreniyoruz, hangi matematik, niçin matematik öğrenmeliyiz, karşılaştığımız zorluklar nelerdir, neler yapılmalıdır" sorularına da yanıt aramak.

-III-
NE ZAMANDAN BERİ MATEMATİK ÖĞRENİYORUZ?

Matematikçiler matematik tarihinin insanlık tarihiyle özdeş olduğunu bilir. Yaşamla baş etme eylemi içindeki ilkel insan bile matematiğe gereksinim duymuştur. Bu gereksinim sadece nesneleri karşılaştırmak ve saymak eylemiyle sınırlı değildir. Nesnelere şekil vermek, ilkel aletler yapmak da matematikle ilgilidir. Örneğin bir taşı daha sert bir taşla yontmak düşünce ürünüdür, bir model yaratmaktır ve yazarak çizerek olmasa bile bir hesaplama işidir. Ve aynı zamanda bir sanattır. Hele de ona bir sap yaparsan. Bu nedenle duygu ve akıl estetiğinin sanat ve matematik olarak en ilkel insana kadar uzandığını söylemek abartılı bir söylem değildir. Tarih boyunca, gözlem, sınama, denemelere dayalı basit etkinlikler adım adım soyutlamaya ve bilgi birikimine yol açmış, bu birikim aktarılır-öğretilir aşamaya ulaşmıştır. Bu birikimin en önemli ayaklarından biri, nesneleri karşılaştırma, sayma, ölçme, hesaplama biçimleridir. Süreç içinde, düşünce ürünü olan felsefe ve akıl ürünü olan mantıkla harmanlanan matematik, mantık ve felsefeyle birlikte doğaya hâkimiyetin temel aracı haline gelmiştir.

> İlkel sayma becerisini aşan matematiğin MÖ 5000 yıllarına uzanan bir tarihi olduğu görülmektedir. Antik Yunan öncesi gelişmenin tümü Sümer, Babil, Mısır, Hint ve Çin gibi doğu kültürlerinin bir ürünüdür. Kuramsal ilgilerin henüz uyanmadığı başlangıç döneminde aritmetik ile geometri, tarım, ticaret ve mühendislik işlerinin yarattığı ihtiyaçları karşılamaya yönelik beceriler olarak ortaya çıkmıştır. Kuramsal ilgilerin ortaya çıkması daha sonra gelen bir gelişmedir. Bunun için, her şeyden önce, elde edilen bilgilerin korunması ve yeni kuşaklarda sürdürülmesi yolunda bir öğretimin başlaması gerekiyordu... (Cemal Yıldırım, *Matematiksel Düşünme*, Remzi Kitabevi, s. 20)

Bilim felsefecisi Cemal Yıldırım'ın da söylediği gibi "matematik öğrenme ve öğretme" etkinliği MÖ 5000 yıllarına dek uzanır. Ayrıca kuramsal ilgilerin gelişmesiyle ortaya çıkan tarihteki ilk okullaşma da matematik ve felsefe alanlarında olmuştur. Deney ve gözleme dayalı diğer ilgi alanları ise felsefe ve matematiğin yarattığı düşünsel ortamda gelişmiştir. Bu denli önemli olan bu gelişmeye biraz daha yakından bakalım.

İLK ADIMLAR



Okul kitaplarında ve bazı popüler matematik kitaplarında saymanın başlamasına ilişkin yer verilen bir kurgu vardır. Tarih öncesi çağlarda çoban ağıldaki koyunları çıkarırken, bir koyun çıkarır kenara bir taş koyarmış. Her koyun çıkışında bir taş koymaya devam edip koyunlarla taşları eşler, akşam ağıla aldığı her koyun için bir taşı geri çeker koyunların tamam olup olmadığını anlarmış. Yani bir anlamda birebir eşlemeyle sayma teorisini uyguluyormuş.

Yukarıdaki kurguya göre tarihin ilk matematikçileri çobanlarmış. Yani koyun ehlileştirilmiş ve evcilleştirilmiş. İnsanlarla birlikte yaşamaya başlamış. Yetmemiş koyunlara ağıl yapılmış.

Demek ki insanların evleri de varmış. Köyler kurmuşlar. Ev yapmayı köy kurmayı biliyorlarmış. O da yetmemiş koyunların başına çoban atamışlar. Yani sosyal bir örgütlenme varmış. Çobanlık diye de bir meslek…

Yok, öyle değil! Bu kurgu ilk sayma becerisini anlatmak için iyi, ama tarihsel açıklama yönüyle iyi değil. Bu sıraladıklarımız daha yakın tarihe ilişkin gelişmeler. "… Yaklaşık 12-13 binyıl öncesinde, buzulların erimesi ve giderek kuzeye çekilmesiyle birlikte Avrupa'nın önemli bir bölümünde step ve tundra iklimini simgeleyen hayvanlar ya yavaş yavaş kayboldu ya da buzullarla birlikte kuzeye doğru göç etti. Kara ve deniz avcılığıyla yaşamını sürdüren, toplayıcılığa dayalı bir besin ekonomisiyle bunu destekleyen insan toplulukları, buzulların erimesiyle başlayan topraklara yayıldı. Böylece ilk kez epipaleolitik çağda Kuzey Avrupa'da İskandinav bölgeleri insanoğluna kapılarını açtı… Nitekim sabit köy yerleşmeleri bu ekolojik koşullarda kuruldu ve gelişti… Domuz, geyik, koyun, keçi ve iribaş hayvanlar sürekli yerleşim merkezlerinin etrafında otluyordu…" (*50 Soruda İnsanın Tarih Öncesi Evrimi*, Metin Özbek, Bilim ve Gelecek Kitaplığı, s. 170-172). Yani buzların erimesi, toprağın ortaya çıkışı, köylerin kuruluşu, koyunun ehlileşmesinin ve başına da bir çoban konulmasının 10 bin yıllık tarihi var. Dolayısıyla çobanın matematikçiliği oldukça yakın bir tarih… Oysa sayma, büyük-küçük, az-çok gibi ölçmeye, karşılaştırmaya dayalı eşyayı nicelikleriyle algılama çok daha eski tarihlere dek uzanır. Belki de insanın sesini kontrol etmeye başladığı, seslerin konuşmaya evrildiği çok daha eski tarihlere kadar. Elbette bunlar da yukarıdaki gibi bir çıkarım.

İlkel sayma becerisine ilişkin tarihsel belgeler günümüzden 30-40 bin yıl öncesine dayanıyor. "Sayısal kayıtlara ilişkin ilk örnekler, Güney Afrika'da Svaziland'ta yapılan kazılarda ortaya çıkmıştır. Buradaki buluntu, yaklaşık MÖ 35.000 yılından kalan bir babunun bacak kemiğidir. Kemiğin üzerinde 29 çentik vardır. Buluntu kemik, Namibia'da zamanı ölçmek için hâlâ kullanılan 'takvim sopalarına' benzemektedir. Neolitik çağdan kalan kemikler, Batı Avrupa'da da bulunmuştur. Çek Cumhuriyeti sınırları içinde bulunan ve bir kurda ait olan bel kemiği, MÖ

35.000 olarak tarihlendirilmektedir ve kemiğin iki yüzünde de, beşlik gruplar halinde iki dizi oluşturan 55 çentik bulunmaktadır. Bu kemik büyük olasılıkla, avlanan hayvanların sayısını kaydetmek için kullanılmıştı." (Richard Mankiewicz, *Matematiğin Tarihi*, Çev: Gökçen Ezber, Güncel Yayıncılık, s. 14) Alıntının devamında MÖ 20.000'lere ait Uganda ve Demokratik Kongo'da bulunan bir kemiğin, ayın evrelerine denk düştüğü saptanmıştır denilerek, "Doğruyu söylemek gerekirse, ister astronomi, ister astroloji, ister kozmoloji olsun, matematiğin gelişimini etkileyen biricik unsur gökyüzü olmuştur" (Age, s. 15) denmektedir.

Biricik unsur olmasa da bu saptama çok önemli. Gökyüzünün irdelenmesi, gözlenmesi sayma becerisinin ötesinde bir eylem. Günlük gereksinimin ötesinde doğayı anlamaya çalışmanın merak duygusunun yansıması. Merak duygusu matematiğin ve bilimin gelişmesinin en temel gücüdür. Bu güç matematikte saymanın dışında hesaplama kültürünü geliştirmiştir. Basit dört işlem dediğimiz ve bugün de matematik öğretiminin olmazsa olmazı olan hesabın gelişimi de uzunca bir tarihsel süreci kapsar. Bu uzun tarihsel süreç boyunca, 1'in ardından 2'nin geldiğini sonra da 3'ün, hele de 1 ile 2'nin toplamının 3 olduğunu söylemek, hatta "az" ile "çok"u ayırmak hiç kolay değildi. Bunu becerebilen "iyi matematikçi"ydi. Hatta büyücü bile sayılabiliyordu.

Tüm bunlar göstermektedir ki, insanın konuşmaya başladığı dönemden itibaren doğayı, doğadaki olayları niteliksel olarak anlama ve özellikle açıklama çabasında niceliksel ilişkilere yani matematiğe gereksinim duyulmuştur.

Yine yukarıdaki alıntıların ve daha ayrıntılı tarihsel incelemelerin gösterdiği önemli bir nokta daha var. O da farklı toplulukların, şaşılacak derecede benzer bir matematik kültürü geliştirmiş olmalarıdır. Yazma çizme aracı olarak kullandıkları kemikler, kil-çamur tabletler, kemikler, deriler, ağaç kabuklarının benzerliği… Ya da kullanılan sayma tabanlarının benzerliği. Rakamları farklı olsa da, Çin'de Mısır'da ya da Amerika'da benzer sayma tabanlarının kullanılması insan düşüncesinin gelişimini anlamamızı sağlıyor. Birbirleriyle hiç karşılaşmamış topluluklar birbirlerinden habersiz 10, 20, 12, 30, 60 gibi aynı sayma tabanlarını

kullanıyordu. Muhtemeldir ki “10” ve “20” sayma tabanlarının seçimi ellerdeki ve ayaklardaki parmak sayılarına, “12” tabanı böleninin çok olmasına, “30” ve “60” ayın evreleri ve dünyanın güneş etrafında dönme sürelerine bağlıydı.

Yukarıda tarih öncesi ya da bilim öncesi diyebileceğimiz dönemde merak duygusu ile birleşen yaşama gereğinin yarattığı matematik oluşumunu özetledik. Ayrıca bu matematiğin sayma becerisi, basit aritmetik işlemler ve ölçme biçiminde geliştiğini, zorunlu bir “akıl yürütme” ile gerçekleştiğini söyledik. Deneysel olsa da farklı kültürlerde şaşılacak benzerlikler olduğunu, benzerliklerin “ortak aklın” kanıtı olduğunu gördük. Örneğin MÖ 4000’lere dek uzanan “π” (pi sayısı)’nin değeri kimi kültürlerde “3” kimi kültürlerde “3,1” ya da “3,5”, “3,4”… alınıyordu. Kültürlerin hepsi “pi” sayısının, dairenin çevre uzunluğunun çapına oranı olduğunu, bu özel sayının kesin değerinin bulunamazlığını sezmiş ama hesaplamalarda da kullanmıştır. Ki günümüzde de “pi” sayısının değerini bulmak üzere çabalar bilgisayar teknolojisiyle devam ediyor. O günlerden bu günlere gelişen matematiğin seyrini de özetleyelim.

İLERİ ADIMLAR – DÖNEMEÇLER

MÖ 8. yüzyıla dek yaşamın zorunlu bir etkinliği olarak süren matematik adım adım gelişerek MÖ 4. yüzyılda bağımsız bir disipline dönüşmeye başladı. Bu dönem aynı zamanda bilimin de genel olarak sistematize olduğu dönemdir. Başlangıcın belirleyici adımı olarak da MÖ 330’larda Büyük İskender’in İskenderiye kentini kurması kabul edilir. Bu kentteki İskenderiye Kütüphanesi’nde dünyanın her yanından toplanan 400.000 kitap vardı. Yine bu kentte kurulan İskenderiye Okulu bilimin merkeziydi. Bu okuldan birçok bilimci yetişti. Örneğin matematiğin kurucusu sayılan Öklid (Euclid) İskenderiye Okulu’nda yetişmiştir.



"… Ptolome MÖ 300 yıllarında İskenderiye'de bir okul ve büyük bir kütüphane kurdu. Sanki bir üniversite gibi çalışan bu okul, dönemin en ünlü bilginlerini bir araya topladı. Her alanda önemli bilginler yetiştirdi; yazılan ya da toplanan eserlerin sayısı 400.000 cilde ulaştı. Bunlar arasında, gelmiş geçmiş en büyük matematiksel yapıt sayılan 13 ciltlik *Elementler* adlı eser de bulunmaktadır. Bu eserin yazarı Öklid (MÖ 313-283), o güne kadar Mezopotamya ve Mısır uygarlıklarının yarattığı matematiği derlemiş ve kendi katkılarını da koyarak günümüze ulaşmasını sağlamıştır." (*Ortaöğretim Matematik Dersi Programları*, M.E.B. Yayınları, 1992, s. 6)

İskenderiye Okulu MS 4. yüzyıla dek birçok matematikçi ve bilimci yetiştirmeye devam etmiştir. Güçlenen Hıristiyanlık, putperestlikle mücadele adı altında bilim ve felsefe merkezi olan bu okula karşı da savaş açmıştır. Dünyanın ilk kadın matematikçisi olan Hypatia (370-415) İskenderiye'deki bir okulun başındadır. Bir Hıristiyan tarikatının yandaşları tarafından işkence ile öldürülür.

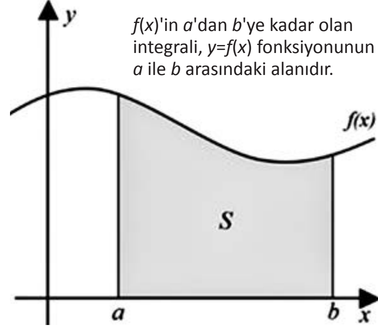
Matematiğin kuruluş dönemi olarak adlandırdığımız bu dönemde, matematikçiler salt matematikçi olmaktan öte felsefeci ve doğa bilimcisiydi de. O güne dek el yordamı ile gelişen bilim, akıl yürütmeye, kanıta evrilmiş, kuramsallaşma seviyesine ulaşmıştır. Matematikte kanıt öne çıkmış, matematik (ve özellikle de geometri) üst seviyede bir soyut düşünüşe ve aksiyomatik yapıya ulaşmıştır. Bugün okullarda okutulan ve adına Öklid Geometrisi dediğimiz geometri hâlâ tazeliğini korumaktadır. Bu dönem aynı zamanda matematik ile doğa bilimlerinin ayrışmaya başladığı dönemdir. Diğer disiplinlerden farklı olarak tümdengelim yöntemini kullanan matematik felsefe ile birlikte gelişmiş, o günden bu yana matematik mantıkla birlikte anılır olmuştur.

Matematiğin ve genel olarak bilimin gelişmesinde dinin de zaman zaman olumlu, zaman zaman engelleyici etkileri görülür. Yukarıda söylediğimiz gibi, bilim merkezi olan İskenderiye Okulu, yükselen Hıristiyanlığın gazabına uğramıştır. Ve matematik İslamiyet'in kuruluş yılları olan 7. yüzyıla dek görece bağımsız ve yavaş gelişmiştir. İslamiyet'in yükseliş dönemi olan

8.-12. yüzyıllar arasında ise Arap, Fars, Türk matematikçilerin öne çıktığını görüyoruz. 13. yüzyılda Avrupa'da başlayan ve 15.-16. yüzyıllarda Rönesans'a dek süren dönemde matematik Avrupa'da gelişmesini sürdürdü. Hindistan ve Çin'de de gelişmeler devam etti. Ama bu gelişmeler oldukça durgundu.

MODERN MATEMATİK ADIMLARI

17. yüzyılda matematik için yepyeni bir dönemin başladığı söylenebilir.



> 17. yüzyılın en büyük matematik olayı, René Descartes (1596-1650) ile Pierre de Fermat (1601-1665) tarafından analitik geometrinin kurulmuş olmasıdır… Analitik geometri, doğurgan, verimli bir matematik dalıdır. Bir eğriyi oluşturan geometrik özellikleri cebirle ifade edip de onun denklemini bulunca, bu denklemden eğriye ait tüm özellikler cebir işlemleriyle çıkarılabilmektedir… Böylece mekanik ve fizik, cebire yaklaşan geometrinin uzantısı durumuna gelebilmiştir… Analitik geometrinin kuruluşuyla insan beyni, üç boyutlu uzaya tutsak olmaktan kurtuldu… Fermat'nın ikinci büyük başarısı, diferansiyel hesabı tasarımlamış olmasıdır. (Şükran Gözen, *Matematik ve Öğretimi*, Evrim Yayınevi, 2000, s. 117-119)

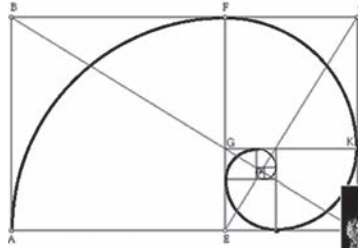
Yazarın söylediği gibi analitik geometri matematikte bir dönüm noktasıdır. Eğrilerin analitik incelenmesi doğa olaylarının anlaşılmasında ve karşılaştırmada ciddi kolaylıklar sağlamıştır. Fermat'nın tasarımladığı diferansiyel hesabın ve integralin yani analizin (kalkülüs) matematik dünyasına girişi ise başlı başına bir devrimdir. Analiz, değişimi, geleceği kestirmenin de en temel yaklaşımlarını kurmuş mühendisliği ileri boyutlara taşımıştır.

> Değişimi değerlendirirken ele aldığımız bariz değişken zamandır; ama kalkülüs her durumda her tür değişkeni ele alabilir. Kalkülüs problemi olarak görülebilecek problem-

> lerin izleri Antik Yunan'a kadar sürdürülebilir; ama Aristoteles ve Herakletios değişimi matematiksel değil, felsefi terimlerle incelemişlerdi. Galileo ve bazı ortaçağ matematikçileri matematiksel yolda ilerlemeye başlamışlardı; ama bu konu aslında modern dönemin iki aydınlatıcısı Newton ve Leibniz'le başladı. Newton ve Leibniz, Kalkülüs'ü 'ilk' keşfeden matematikçiler olarak anılır; ama aslında Kalkülüs'ü birbirlerinden bağımsız olarak, üstelik de farklı matematiksel notasyonlarla tanımlamışlardı. (Tony Crilly, *Matematik*, çev: Ebru Kılıç, Versus Kitap, s. 86-87)

Modern Matematiğin doğuşu diyebileceğimiz ve 17. yüzyılla başlayan bu dönem; aynı zamanda tümevarımın deneysel bilimlerin akıl yürütme yöntemi olarak kullanıldığı dönem olmuştur.

ÇAĞDAŞ DÖNEM





İçinde bulunduğumuz dönem ise çağdaş matematik dönemi olarak adlandırılmaktadır. 19. yüzyılla başlayan bu dönem şunu göstermiştir ki matematik geçmişin mirası üzerinde ve kendisini yenileyerek gelişecektir. Her yıl yüzlerce teoremin kanıtlanması bunun kanıtıdır. Bu dönemin en çarpıcı buluşları olarak Gauss-Reinman-Laboçevski çizgisiyle geliştirilen Öklid Dışı Geometriler anılabilir. Ki bu geometriler Görelelik ve Kuantum kuramlarının temellerini oluşturmuştur. Yine matematiksel tartışmaları ve sürecin devamı olarak özellikle Cantor (1845-1918) tarafından kurulan sonsuzluk ve kümeler kuramı, sayılabilir-sayılamaz sonsuzluğun açıklanması matematiğin önündeki birçok engeli kaldırmıştır. Sonsuzluğun incelenmesinin güzelliği ise cabası…

Sonuç olarak modern matematik, modern mantık günümüzde aksiyomatik temellere oturmuş, soyutlamanın eşsiz güzelliğine ulaşmış, yeni olgulara doğru hızla yol almaktadır. Bu yol çağdaş bilimin gelişmesinin önünü açan en temel dinamiktir.

-IV-
MATEMATİK NEDİR?

Lise matematik öğretmenliğine başladığım ilk yıl. Lise 1 matematik dersinin ilk konusu "mantık". Aslında "önermeler mantığı". Biz kısaca mantık diyoruz. Konu matematiğin simgeler ve kavramlar üzerine kurulduğunun iyi bir anlatımı ve matematiğe giriş için iyi bir seçim. Ancak benim için sıkıntılı bir konuydu. Çünkü öğrencilere de sıkıcı geliyordu. Bu nedenle de "olmasa da olur" diyordum mantık konusu için. Ama neylersin. Müfredatta var. Anlatacaksın, el mahkûm! Aynı konu felsefe öğretmenlerinin anlattığı mantık dersinin de temel konusu. O nedenle felsefeci arkadaşlarla işbirliği yapar, hangi örnekleri vereceğimizi, nasıl anlatacağımızı tartışırdık. Onlar da sıkıntılıydı önermeler konusunda.

Öğrenciler soruyor, "niye öğreniyoruz bu konuyu?" Yanıtlıyorum, "önemli…" Gerekçe bu. Gerçek gerekçeyi söyleyemiyorum. Benim için gerçek gerekçe; "müfredatta var" olması. Ben anlatmaya onlar öğrenmeye mahkûm. Sadece ben mi bu çelişkiyi yaşıyorum. Çoğumuz hatta belki hepimiz… Öyle olduğu içindir ki yıllarca üniversite giriş sınavlarında mantık konusu ile ilgili doğrudan soru sorulmadı. Ve soru sorulmadığı için de okullarda önermeler mantığı konu olarak işlenmedi. Yıllar son-

ra da mantık sorusu geldiğinde öğretmenler, soru hazırlayanları "oyunbozanlıkla" eleştirdiler.

Daha ilk yıllarımda yaşadığım bu sıkıntı işe yaradı. Mantık konusunu niye anlatıyorduk? Müfredata konulması gerekli miydi? Matematikteki yeri neydi? Hatta matematik neydi?

Ne olduğunu açıklayamasam da matematiği ve matematik anlatmayı seviyordum. Ama yetmiyordu. Benim sevmem öğrencilerin de sevmesi için bir koşul olamazdı... Araştırmaya başladım ve gördüm ki yanıtı hiç de kolay değilmiş. Profesyonel matematikçiler, bilim felsefecileri bile belirli bir tanımda birleşemiyor.

> Hemen belirtmeli ki, sürekli çabalara karşın, bu soruya yetkili kafaların üzerinde birleştiği bir yanıt henüz verilmemiştir. Körlerin dokunarak tanıtlamaya çalıştıkları fil gibi: Matematik, kimisine göre kuralları belli satranç türünden bir zekâ oyunu; kimisine göre sayı türünden soyut nesneleri konu alan bir bilim; kimisine göre bilim ve pratik yaşama için yararlı bir hesap tekniği. Matematikçilerin gözünde ise matematik bizi doğruya, kesin bilgiye götüren biricik düşünme yöntemi. Matematiği 'bilimlerin kraliçesi' sayanların yanında, hizmetinde görenler de var. Hatta onu ne olduğu, neyle uğraştığı belli olmayan, salt bir zihinsel çıkarım ya da dönüştürme işlemi diye niteleyen, ya da karmaşık kavramsal bir labirente benzeten saygın filozoflara rastlamaktayız. (Cemal Yıldırım, *Matematiksel Düşünme*, Remzi Kitabevi, s. 12)

Bu saptamanın ardından benim tanım yapmaya kalkmam elbette aymazlık olur. Ama şunu söyleyebiliriz: Matematik hem kendi iç işleyişi, davranışı, ilişkileriyle bir disiplin hem de dış dünyayı, yaşamı anlama-açıklama çabası için kaçınılmaz bir disiplindir. Tamam söyledik! Peki, tanım mı yaptık? Hayır. Bildiğimiz ve anladığımız ölçüde anlatmaya çalıştık. Anlatmaya çalışmak en doğrusu. Çocukluğumdan beri "insan nedir" sorusunun tartışmalarını anımsıyorum. Bir türlü yanıtlanamaz. Oysa insanın ne olduğunu bilmeyen mi var? Olmuyor işte, insan kendini tanımlayamıyor. Kendi tanımını yapamayan insan, oldukça karmaşık olan bir dünyayı tanımlayacak! Kolay de-

ğil… Koskoca Galilei bile tanımdan kaçınmış. Ama anlatmaya da çalışmış:

> … Evren her an gözlemlerimize açıktır; ama onun dilini ve bu dilin yazıldığı harfleri öğrenmeden ve kavramadan anlaşılamaz. Evren, matematik diliyle yazılmıştır; harfleri üçgenler, daireler ve diğer geometrik biçimlerdir. Bunlar olmadan tek sözcüğü bile anlaşılmaz; bunlarsız ancak karanlık bir labirentte dolanılır. (Richard Mankıewıcz, *Matematiğin Tarihi*, çev: Gökçen Ezber, Güncel Yayıncılık, s. 145)



Öyleyse şöyle bir sonuç çıkıyor söylenenlerden. Matematiğin başka bir dünyası vardır. Yaşadığımız dünyadan beslenen. Bu dünyanın ayrı bir dili vardır. Simgeleri, terimleri, kavramlarıyla… Sonuca ulaşma yöntemi de farklıdır bu dünyanın, yargıları da. Kesindir yargıları. Bir de statik değil hareketlidir bu dünya. Sürekli yenilenen, doğrulanan, gelişen… Akışkandır kısaca… Yanıtlara geçelim.

EVRENSEL BİR DİLDİR

Fransız ressamın sergisini gezmek için Fransızca bilmek gerekmez. Bir spor müsabakasını izlemek için de oyuncuların dilini bilmek gerekmez. Matematiği anlamak için de matematik yapanın dilini bilmek gerekmez. Bu anlamda sanat gibi, spor gibidir matematik. Ama bir farkla ki, "matematiğin dili" bilinmelidir. Çünkü o sanat gibi, spor gibi kendiliğinden bir dil değildir. Oluşturduğu özel bir dili vardır. Onunla konuşur. Ülkeden ülkeye değişmeyen bir dildir o. Dünyanın hangi ülkesinde olursa olsun 3+5 = 8 işlemini gören, yazılanları anlar. Bu nedenle matematiğin dili evrenseldir. Hatta ortak bir dünya dili yaratılması tartışması yapanların ve isteyenlerin örneği hep matematiğin evrensel dili olmuştur.

Örneğin; "p Λ q ≡ 0" yazımı mantık ve matematikte kullanılır. Bir önermedir. Matematik bilmeyenler için bir şey ifade etmez. Matematik bilenlerin ise hangi dille konuştuğu önemli değildir. Önermenin okunuşu; "p ve q denktir sıfır" biçimindedir. Bu da bir şey ifade etmez okuyana. Bu önermeyi matematikçi şöyle anlar: "p ve q birer önerme olmak üzere p ve q birleşik önermesinin sonucu yanlıştır." Devamını şöyle getirir: "p ve q önermelerinden en az biri yanlış önermedir." Sözle ifadesi bu. Neredeyse bir paragraf gibi… Ki bu haliyle bile mantık-matematik bilmeyen için anlamlı hale gelmesi oldukça zor. Açıklamak için daha uzun tümceler kurmak gerekir. Oysa "p Λ q ≡ 0" bir tümcedir. Çetrefilli görünse de günlük dildeki çok uzun bir ifadeyi matematik diliyle bir çırpıda anlatmaktadır.

Daha kolay anlaşılır bir örnekle söylersek, 97856 sayısı, rakamları gösteren 9, 7, 8, 5, 6 simgeleri olmasaydı, "doksan yedi bin sekiz yüz elli altı" biçiminde yazılacaktı. Bir de rakamların oluşturduğu, 97856 ile 79281 sayılarını çarptığınızı ve bu işlemi yazı dilinde yaptığınızı düşünün. Bu bir paragrafı da geçer. Öğrenciler sık sık sorar; "Hocam bu rakamları niye uydurmuşlar?" Soru hoşnutsuzluk içerse de yerinde bir soru. Çünkü rakamlar uydurulmuştur gerçekten. Gerekli ve işlevsel bir uydurma… Taşa "taş" demek de bir uydurma değil mi? Konuştuğumuz dilde nesnelerin ve kavramların isimleri vardır. Kuş, ağaç, sevgi gibi isimler, harf denilen (a, b, c…) simgelerle gösterilir. İsimler ve diğer öğeler bir araya gelir, cümlelere anlatım biçimlerine dönüşür. Cümleler şiir olur, roman olur, makale olur. Matematik dilinin de kendine has simgeleri, terimleri, kavramları, cümleleri vardır. Onlar da birer uydurmadır. Ya da uydurulanlardan türetme. Şöyle bir matematik cümlesi düşünelim:

$x \geq 0$ için $f(x) = \frac{1}{x} \ \Lambda \ \lim_{x \to \infty}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x)$ azalan fonksiyondur." Eğer okuyan matematik dünyasına ait olan; "Λ, ⇒" gibi simgeleri, "$x \geq 0$" önermesindeki terimleri ya da "azalan fonksiyon" kavramını bilmiyorsa bu önerme okuyana bir şey ifade etmez.

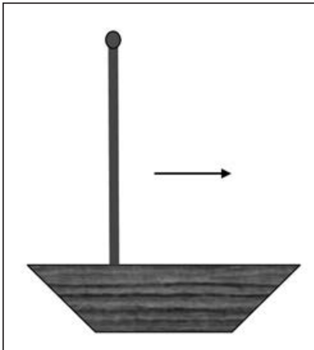
Sadece kısaltmak için mi yapılmış bu uydurmalar? Diğer bilim alanlarında da var mı? Varsa ne kadar var? Onu da konuşalım. Deneysel bilimler ile sosyal bilimlerin ilgi alanı çevredeki ve doğadaki olgulardır. Olguların gözlenmesi, sınanması ve deneylerle doğrulanması ile bilgiye ulaşılır. Olgusal bilim diye adlandırılan bu bilim dallarının kuramsallaşma aşamasına dek özel bir dili yoktur. Bu nedenlerle anlaşılması zor değildir. Kafasına elma düşen Newton'un "yerçekimi vardır" demesi kolayca anlaşılır. Çükü "elma", "düşmek", "çekim" gibi terim ve nesneler herkesçe bilinen kavramlardır. Küçük bir akıl yürütmeyle yer ve çekmek yerçekimi sözcüğüne dönüşür. Zorluk, yerçekimi kuvvetinin cisimleri nasıl etkilediğinin araştırması ile başlar. Bu aşamada, düşen cismin hızı (*V*), düşmenin şiddeti (*F*), cismin kütlesi (*M*), geçen zaman (*t*) ile gösterilerek aralarındaki ilişki incelenir, hesaplanır. Artık matematik dünyasının alanındadır onlar. Matematik dünyasının nesneleridir. *V*'dir, *F*' dir, *t*'dir, *g*'dir… Ama yetmez… Olgular, yeni kavramlara, hesaplamalara, formüllere gereksinim duyar. Olgular soyutlamaya, soyutlama kurama dönüşür. Kuramın güvenilirliği ise hesaplamaya dayanır. Yani nicelikseldir, matematikseldir. Hesaplama sonucunda soyut cümleler yazılır. Açıklayıcı cümleler. $F = m.a$, $h =1/2.\ g.t^2$ gibi. Çünkü hesap "gözle görülen" değildir. O aşamada yani kuramlaşma aşamasında aşikâr olan ve adına "yer" denilen nesne, cisimleri kendisine doğru çeken "gücü kuvveti" olan bir nesne haline gelmiştir. İşlevselliği de değişmiştir matematiğin. Yeni işlevi yaşamı, yaşamın olgularını kendi diliyle açıklamaktır. Geçmişi, bugünü, geleceği, olguları, uzayı… kısaca tüm evreni açıklayan bir dil. Aklın sınırlarını zorlayan, anlaşılması güç olan olayları açıklayabilen bir dil. Görülemeyen, dokunulamayan, kendine has terimleri, kavramlarıyla… Bütün bunlar o dilin kullanıldığı farklı bir dünyanın işleridir. Bildiğimiz fani dünyanın değil...

FARKLI BİR DÜNYADIR

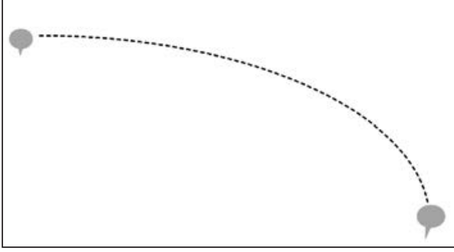
Matematik öğretmenleri sık sık "ben hiçbir şey anlamadım" tepkisiyle karşılaşır. Bir öğretmen için hiç de hoş olmayan, olumsuz, hatta acıtıcı bir tepkidir bu. Dersi dinlememe veya dinleye-

meme gibi bir neden yoksa tepki doğrudur. Çünkü matematiğin başka bir dünyası vardır ve anlayabilmek için o dünyaya girmek gerekir. Galaksi dışında, keşfedilen ya da keşif bekleyen bir dünya gibi… O dünyanın dili farklı, nesneleri farklı, düşünüş yapısı, yargıları da farklı. Yadırgarız, bocalarız o dünyayı algılamak için. Oysa o dünya ve o dünyanın unsurları bizim dünyamıza yabancı değildir. Hatta bizim dünyamızdan esinlenmiştir, bizim dünyamıza göre düzenlenmiştir. Ama yine de bizim keşfimize açıktır, keşfimizi bekler…

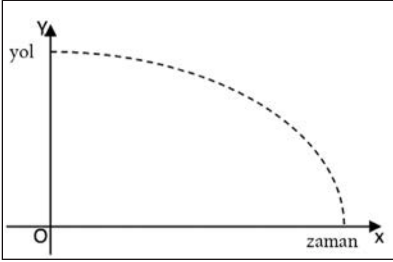
Doğadaki nesneler, matematiğin nesnelerine dönüşmesiyle doğanın nesnesi olmaktan çıkar. Olgular da öyle. Matematik onları "zapturapt" altına alır. Yerçekimi örneğindeki elma, matematik dünyasında "bütün elmalara", "bütün cisimlere" dönüşür. Onlar artık bildiğimiz nesneler değildir. Gerçekte var olsa bile görülemeyen hatta gerçekte var olmayan nesnelerdir. Düşüncemizde vardır ve kavranması beyinsel gelişmenin ölçüsüne bağlıdır. Çünkü matematik dünyası onları genellemiştir. Artık bu nesneler, "cisim" gibi, "kuvvet" gibi, "vektör" gibi adlandırılan daha karmaşık kavramlardır. Düşünseldir, soyuttur. Matematik bu kavramlarla işler. İşte bu noktada matematiğin nerede başladığı nerede bittiği birçok kere karıştırılır. Söyleşilerde verdiğim bir örnek üzerinden tartışalım. Şöyle bir soruyla: Hareket halindeki bir geminin direğinin tepesindeki bir cisim düşüyor. Bu cisim nereye düşer?



Tartışılır. Yanıtlar alınır: Denize düşer, geminin arka tarafına düşer ya da direğin dibine düşer gibi… Elbette rüzgârın, sürtünmenin ihmalini de açıklarsınız. Tartışanları, yalıtılmış kendi dünyanıza çekmek için. Direğin dibine düşeceğinde birleşirsiniz. Sonra düşerken izlediği yolu düşlersiniz birlikte. Gece karanlık, cisim fosforlu… Yol da belirir düşüncede.



Nasıl bir yol olduğu tartışılır bu kez. Hangi yükseklikten atıldı ya da düşmeye başladı? Gemi ne kadar hızlıydı? Aldığı yatay yol ne kadardır? Gemi hızlandıkça cismin düştüğü yer nasıl değişir? Hatta geminin hızını ışık hızına çıkarıp düşüp düşmeyeceği tartışmalarına bile gidebilirsiniz. Oldukça eğlenceli, akıl sınırlarını zorlayıcı tartışmalar.



Sonra alırsınız bu "düşüş"ü. Bir yatay, bir dikey eksene yerleştirirsiniz. O dünya ile bağını kesersiniz. Adına model dersiniz. Yatay eksen yatayda aldığı yolu, dikey eksen düştüğü yüksekliği gösterir. Bilinenlerden hareketle bilinmeyenleri açıklamaya çalışırsınız. Hangi hızla atıldığı devreye girer. Bu kez hıza göre yeni modeller oluşturur, yeni formüller oluşturursunuz. Ve yeni formüller…

Tüm yaptıklarınızı, derler toparlar, kesinleştirir ve "alın" der geri gönderirsiniz. "Alın ve nasıl düşeceğini bilin" gibilerden. Sorarlar belki "nasıl düşeceğini bilirsek ne olacak" diye. Yanıt verirsin; "bilmem, o senin dünyanın işi, benim dünyamdan bu kadar…"

Bu örnekle, matematiğin nerede başlayıp nerede bittiği, matematik dünyası ile nesnel dünyanın işleyişi, her iki dünyanın nesneleri arasındaki fark ve modelleme mantığı oldukça anlaşılır hale gelir. Bu işleyişi bir yazımda şöyle genellemişim:

> Ancak tüm bunlar matematik dünyasının dış dünyadan kopuk olduğunu göstermez. Matematik dış dünyadan aldığı olguları ve nesneleri "kusursuz" nesnelere dönüştürür.

Kusursuz hale getirdiği nesneleri niceliksel özellikleriyle inceler. Varsayımlar oluşturur, varsayımları kanıtlar ve gerçek dünyaya biçimlenmiş olarak geri gönderir. Gerçek dünyaya biçimlenmiş olarak aktarılan önermeler kesinlik taşır ve aynı zamanda diğer bilimlerin güvenilirlik kaynağıdır. Bu nedenle günlük yaşamda bile kesinlik iki kere iki dört eder" gibi matematiksel biçimde ifade edilir. Birçok bilimci de matematiği bu döngüsü ve yaşamın her alanıyla ilişkisi nedeniyle ayrı bir bilim olarak tanımlamaz, "Bilimlerin niceliksel ifadesidir" der.

Matematik dünyasının yarattığı kesinlik algısını rakamların yarattığı algılarla örnekleyelim. "2" doğada yoktur. Doğada "3" de yok. İki elma var, iki masa var, iki çocuk var. Ama ikişer tane olan elmanın, masanın, çocukların niceliksel ortaklığı da var. İşte "2", bu ortaklığın adı. Matematikçe söylenirse, "2", iki elemanlı kümeleri gösteren simge. Doğada olmayan, matematik dünyasında olan bir nesne. Bu nesnelerin matematik dünyasındaki ilişkileri de başka. İki elmayla üç elmanın toplamı beş elmadır deriz. Bir tabağa önce iki, sonra üç elma koyar ve sayarız. Sonra da sayıp beş olduğunu gösteririz. Bir deneydir. Başarılıdır. Gözleyen için ikna edicidir. Matematikteki karşılığı da, "2+3 = 5"tir. Ama günlük yaşamda, "iki elma ile üç armut… eder" diyemiyoruz. Hatta toplanamaz deriz. Çünkü günlük yaşamda yapılan işlem bir araya getirmenin ötesine geçmez. (O da her zaman olmaz. İki kurtla üç kuzuyu bir araya getirmek zordur. Oysa matematik dünyasında kuzular da kurtlar da birer nesnedir. Kurt kuzu kadar masumdur. Ya da kuzu kurt kadar yırtıcı. Onlar toplanır. Karşılığı da yine "2+3 = 5" biçimindedir). Çünkü 2 ve 3 matematik dünyasında elmadan, armuttan soyutlanmış nesnelerdir. O nedenle "2+3 = 5"in matematiksel kanıtı da farklıdır. "Gördüğünüz gibi iki elmayla üç elmanın toplamı beş elma ediyor" biçiminde değildir. Ayrıca "2+3 = 5" işlemi matematik dünyasında her zaman doğru da değildir. Örneğin beşlik sayma sisteminde, "(2)beş+(3)beş = (10)beş biçimine dönüşür. Elbette tüm bunlar, "2, 3, 5, +, =," gibi kavramlar bilindiğinde anlamlıdır. Yani başka bir dil. Hem de kim hangi dili konuşursa konuşsun matematik herkesin anlayacağı bir dil. Evrensel…

Şekillerin de matematik dünyasıyla ilişkisi kaçınılmazdır. Gerçek dünyada düzgün-yuvarlak birçok nesne vardır. Bu nesneler kendi özelliğine bağlı olarak günlük yaşamda kullanılır. Bu nesnelerin ortak özelliğini tekleştiren matematik, şekli kendi dünyasına alır, yuvarlağın çevresini "çember" diye adlandırır. Onu didiklemeye başlar. Günlük yaşamda mükemmel olmayan çember, artık mükemmeldir. Ve o çember kâğıda ya da tahtaya çizilen çemberden bile farklıdır. Çünkü insan beynindedir. En iyi çizimde bile pürtükler varken o çemberde pürtükler yoktur. Bu çember, merkeziyle, yarıçapıyla, çevresiyle, sınırladığı alanla incelenir, ilişkilendirilir. Sayısal ilişkileriyle biçimlendirilir. İşlem tamamlanır. Kesin hale gelen önermeler biçiminde gerçek dünyaya geri gönderilir. Elbette bu ilişkilendirmede de, "merkez", yarıçap", "pi sayısı"… gibi matematik terimleri ve ortaya koyduğu kavramlar kullanılır. Ve de bilinmelidir.

Olgusal yargıların "en doğru" olmasına karşın matematik yargılar "doğru"dur dedik. Yani kesin yargılardır. Kesin olan bu yargıların ifadesinde de net ve yalındır matematik dünyası. Ve de her olguyu kendi ortamında ele alacak kadar ince, özenli. Örneğin, "kesişmeyen iki doğru paraleldir" yargısı düzlem için doğru, üç boyutlu uzay için yanlıştır. O nedenle "düzlemde kesişmeyen iki doğru paraleldir" biçiminde yeter ve gerek sayıda sözcükle anlatır. Aynı önermeyi, "iki boyutlu olan düzlemde iki doğru çizildiğinde, bu iki doğru sonsuza dek kesişmiyorsa, yani ortak bir noktası yoksa…" biçiminde destan gibi anlatmaktan da kaçınır. Dil yapısına uymadığı gibi, matematik dünyasının katışıksız yapısına da uygun değildir.

Sonuç olarak kendi içinde bütünlüğü olan bu dünyada var olmak elbette kolay değil. Anlamak da. O nedenle özellikle matematik öğretiminde "matematik kolaydır" gibi gerçek olmayan söylemler anlamsızdır. Kolaylaştırmak için her anlatıma günlük yaşamdan örnekler vermeye çalışmak da gülünç karşılaştırmalara neden olabilir. Günlük yaşamdan, doğadan örnek verme öğrenmeyi güçlendirir. Bu sav, fizik, kimya, biyoloji, tarih, coğrafya… öğretirken gerekli ve hatta zorunludur. Örneğin fizikte hızı anlatırken, bir otomobilin, bir canlının hareketi bire bir örnektir. Algılanması

> kolaydır. Matematik öğretiminde ise örnek vermek zordur. Çoğunlukla da olanaksızdır. Özellikle de lise döneminde. Örneğin matrise ya da logaritmaya, dördüncü dereceden fonksiyon eğrisine... Çünkü bu saydıklarımız ve benzerleri bir anlamda yaşamdaki olayların örneği ya da modellemesidir. Bu nedenle kimi matematikçiler matematik için "bir modeller dünyası" der. Kaldı ki soyut dünyanın örneklenmesi çoğunlukla anlamlı da değildir. Biraz da matematiği doğru bilmemekten kaynaklanır. Ne yazık ki bu anlamda ciddi yanlışlar yapılmaktadır. Örneğin MEB onaylı geometri kitabında doğru parçasına örnek olarak (sözüm ona modelleyerek) Bolu Dağı Tüneli veriliyor. Düşünün koskoca tünel. İçinden 3-5 TIR birlikte geçebilir, taban alanı hatta hacmi vardır. Doğru parçası ise, alanı hacmi olmayan tek boyutlu bir kavram. Doğru parçası ile tünelin tek benzerliği iki ucunun sınırlı olmaları. Farklılıkları ise kat kat fazla. Koskoca Bolu Dağı Tüneli'nden doğru parçası çıkarmak! Şişeden cin çıkarmaktan daha zor. Örnek ya da model yanlışsa dil cambazı olsan da işe yaramaz. (Seminer notu)

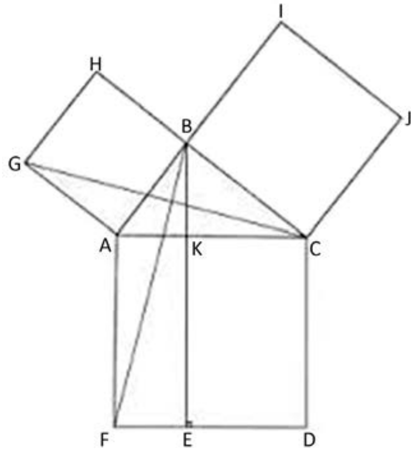
Kendi yazımdan yaptığım alıntıda matematik yargılar "en doğru" değil "doğru"dur diyorum. Neden? Çünkü matematiksel bilgi "kanıt"a dayanır. Kanıtlanamayan bilgi kesin değildir matematik dünyasında. Hatta "matematiksel bilgi" değildir. Ve ardından bir soru; kanıtlanan bilgi her zaman kesin midir?

KANITLAMA ETKİNLİĞİDİR

Matematiksel bilgiye ulaşma yolu da diğer disiplinlerden farklıdır. "Şekilde görüldüğü gibi", "deneyin sonucuna göre", ya da "tarihte yaşandığı gibi" göndermeler matematik bilgiye ulaşma için yeterli değildir. Bilgiye ulaşma yöntemi; "varsayım-kanıt-yargı" biçiminde özetlenebilir. Bu üçlemenin gerçekleşmesi akıl yürütme ve dil ilişkisinin üst boyutta kullanımını gerekli kılar. Ancak bu noktada "matematikte deney olur mu" sorusunu açmakta yarar var. Bilim ve Gelecek Kitaplığı'ndan yayınlanan *50 Soruda Matematik* kitabında Şahin Koçak ilginç bir soru cevap yöntemi kullanmış. Soran çekirge, yanıtlayan çerçi… Şahin Hoca'nın konu ile ilgili diyalogu şöyle:

> **Soru 19:** Matematikte de deney olur mu Çerçi?
>
> **Cevap 19:** Hiç olmaz olur mu? Ben ortaokul öğrencisiyken, Pisagor teoremini kontrol etmek amacıyla, kalın bir kartona bir dik üçgen ve onun kenarları üzerinde kareleri çizdikten sonra, kareleri dikkatle kesmiş ve tanıdığım bir bakkala giderek, bir kefeye büyük kareyi, diğer kefeye de diğer iki kareyi koyup, terazinin dengede durup durmadığına bakmıştım. Sonuç gayet tatminkârdı. Bu benim için bu teoremin doğruluğuna daha güvenilir bir delil olmuştu. **Çekirge**: Şimdi biz böyle bir şey yapsak, hocalarımız bize gülerler, hatta belki de kızarlar! **Çerçi:** Vallahi, aslında ben de bu yaptığımı hocama söylememiştim. Keşke söyleseydim, belki hoşuna bile giderdi. Çocukluk işte, ben de çekindim herhalde. Fizik dersinde deneyler yapıyorduk, ama matematik için bu kimsenin aklından geçmiyordu. Matematik tamamen akıl işiymiş gibi görünüyordu. Oysa deney, gözlem ve akıl arasındaki sınırları belki de çok keskin çizmemek lazım. Matematiğin temel kavramları belli nitelikte ifade edilmeden önce, binyıllar boyunca ne gözlemler ve belki ne bilinçsiz deneyler yapıldı da, sonra akıl bunları biriktirdi, düzenledi, soyutladı, oralara geldi… (Şahin Koçak, *50 Soruda Matematik,* Bilim ve Gelecek Kitaplığı, s. 29)

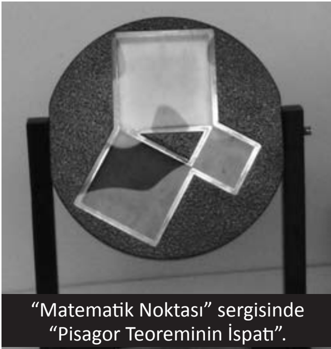
Şahin Hoca'nın bu söylemleri özellikle alıntının başında söyledikleri bizim yukarıda söylediklerimizle çelişir gibi görünüyor. Hayır değil! Alıntının devamında Şahin Hoca gözlem, deney, kuram vurgusu ile anlatımı bütünlüyor. Bizim alanımız yani eğitim için bu söylem çok önemli. Eskişehir Anadolu Üniversitesi Matematik Bölümü'nün hazırladığı "Matematik Noktası" adlı sergiyi gezmiştim. Öncelikle söyleyeyim çok nitelikli, değerli ve emek kokulu bir çalışma.





Sergide bir dik üçgen ve eklenti olarak kenarlarında oluşan kareler şeffaf, ince prizmalar olarak yapılmıştı.

Hipotenüs üzerinde oluşturulmuş kare tabanlı prizma sıvı ile dolu. Şekil ters çevrildiğinde büyük prizmadaki su küçük prizmalar biçiminde olan diğer iki kabı dolduruyor.

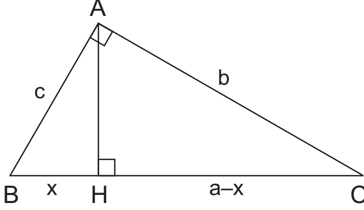


"Matematik Noktası" sergisinde "Pisagor Teoreminin İspatı".

Bir anlamda Pisagor bağıntısının deneysel gösterimi.

Tereddütle baktım, "matematikte deney"e… Tereddüt ettiğimi sezen ve bize sergiyi anlatan sayın Prof. Mehmet Üreyen Hoca, "küçük sınıf öğrencileri için görselliği öne çıkardık" açıklamasında bulundu. Yani bilginin kanıt öncesi güvenilirliği. Bu anlayış eğitimin kademeleri için önemliydi. Küçük sınıflarda ilköğretim ya da ortaöğretim için deney, lise döneminde

kanıta dönüşmeliydi. Aşağıdaki gibi…



$|BC| = a$ olmak üzere
önceden kanıtlanmış Öklid bağıntılarına göre:

$$b^2 = (a–x).\, a$$
$$+ \quad c^2 = x.a$$

$b^2 + c^2 = (a–x).a + x.a = a^2 – ax + ax$'den,
$b^2 + c^2 = a^2$

Öğrenim kademesine göre davranış, soru çözümleri ile ilgili olarak da göz önünde bulundurulmalıdır.

Örneğin, "$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+.....=?$" sorusunun yanıtı ortaokul hatta ilkokul çağındaki öğrenciye sayı doğrusu üzerinde;



gösterilerek "$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+.....=1$" sonucuna ulaşılabilir.

Daha da somutlaştırılmak istenirse: "Sana bir elmanın yarısını ($\frac{1}{2}$) verdim. Sonra kalanın yarısını, yani $\frac{1}{4}$'ünü verdim. Daha sonra yine kalanın yarısını, yani $\frac{1}{8}$'ini ($\frac{1}{4}$'ün $\frac{1}{2}$'sini) verdim. Bu işleme devam ederek $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ ... 'ünü verdim. Elinde elmadan bir parça kalmadığında ne kadarını vermiş olurum?" sorusunu düşündürerek, hatta uygulayarak deneysel yolla (ya da düşünsel deneyle) aynı sonuca ulaşılabilir.

Daha ilerideki sınıflarda ise sonuç bir denklem çözme kavramı olarak öne çıkmalıdır.

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \text{ denilip,}$$

$\frac{1}{4}$ ve sonrası $\frac{1}{2}$ parantezine alınarak

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)$$

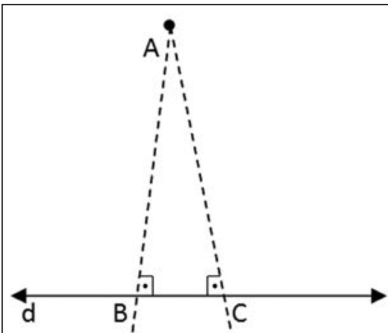
ve parantez içindeki toplam yerine ilk başta yazılan "x" konularak,

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.x \text{ ve } x = 1$$

sonucuna ulaşma becerisi kazandırılmalı.

Her üç çözüm de gizem dolu bir sorunun güvenilir çözümleri olmak dışında matematiksel akıl yürütmenin güzelliklerini içermektedir. Adına matematiksel deney de desek, kanıt da desek sonuçta çözümlerdeki kesinlik, "güvenilirlik+güzellik" biçiminde formüle edilebilir. Bu nedenle kanıtlamanın yok sayıldığı matematik amacına ulaşmaz. Ayrıca değişik kanıt yöntemleri verilerek matematiksel düşünüşün erdemlerini öne çıkarmak matematiksel kazanımdır.

Bazı kanıt yöntemlerinde akıl yürütme - dil ilişkisi daha da önem kazanır. "Olmayana ergi" yöntemi gibi… Bir örnek verelim. "Düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir dik doğru çizilir" biçimindeki önerme bir varsayımdır. Kanıtlanması gerekir.



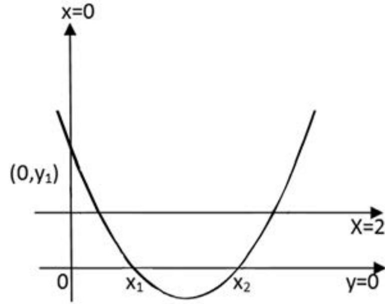
Anlatma ve anlaşılır olma kolaylığı yönüyle bir d doğrusu ve dışında bir A noktası alalım. A noktasından d doğrusuna iki farklı dik doğru çizildiğini varsayalım. Dik doğruların d doğrusunu kestiği noktalara B ve C noktaları diyelim. A, B, C noktaları ABC üçge-

nini oluşturur. Üçgenin B ve C açıları 90'ar derecedir. İki açının toplamı 180^0 olur ki, A açısı 0^0 olmak zorundadır. Bu durum ise üçgen olma koşuluna aykırıdır. Sonuçta "AB dikmesinden başka bir dikme çizmek olanaksızdır" yargısına varırız. Olmayana ergi değişik ve oldukça estetik bir kanıt biçimidir. Gücünü akıl yürütme ve ifade edebilme yeteneğinden alır.

AKIŞKANLIK MODELLEMESİDİR

Yaratıcılık

İnsan aklı olgulardan bağımsız olarak sürekli üretim ve gelişme seyrindedir. Bu edim daha çocukluktan başlar. Bilinenden bilinmeyene ulaşmanın en güzel yoludur akıl yürütme. Çalmak kavramını bilen ama hırsızı bilmeyen iki-üç yaşlarındaki çocuğunun hırsıza "çalancı" demesi yine üç-dört yaşlarındayken üçgen, dörtgen kavramlarının kenar ya da köşe sayısı ile bağını kuran çocuğun "V" harfine "ikigen", "I"ya "birgen", "İ"ye "noktalı birgen" yakıştırması da çocuk aklının yaratıcılığının güzel bir örneğidir.



Güzel matematiksel bir örneği de fonksiyon konusunu anlattığım bir lise sınıfında yaşamıştım. Örnekte akıl, mantık ve matematik bir aradaydı. $f(x) = ax^2+bx+c$ ikinci dereceden fonksiyonunu tartışmış ve analitik düzlemde grafiğini çizmiştik. Fonksiyonun bir gerçel sayıya ($f(x) = 2$ gibi) karşılık gelmesi halinde denkleme dönüşeceğini sezen bir öğrenci "$f(x) = 0$ olduğunda yani fonksiyon 0'a eşit olduğunda, bu durum fonksiyonun grafiğinin yatay ekseni kestiği noktaları göstermez mi?" çıkarımında bulunmuş arkasından da bir başka öğrencim, yarı muzur bir anlatımla ve kendini benim yerime koyarak; "Aaa hakkaten doğru. Aferin sana" dedikten sonra; "Eee peki fonksiyon sıfırdan büyükse ($f(x) > 0$) grafikte

neyi gösterir?" sorusunu sormuştu. Benim, "sence neyi gösterir?" soruma karşılık da, "Grafiğin yatay eksenin üzerinde kalan kısmını" yanıtını vermişti. Tam da benim gelmek istediğim noktaya gelmiştik. İkinci dereceden bir fonksiyon, ikinci dereceden denkleme, ikinci dereceden eşitsizliğe rahatlıkla dönüşebiliyordu. Durağan görünen bir grafik hareketli bir nesneye dönüşmüştü. Ve bu hareketi öğrenciler yaratıyordu. Ardından düşünüşlerde olabilecek yanlışları tartışmaya başladık… Ama önemli olan öğrencilerin çıkarımda bulunması ve transfer gücüydü.

Transfer gücü ve yaşamsal karşılıklar

Matematik öğrenmeler hem kendi içinde hem de disiplinler arası transfere açıktır. Yukarıda matematiğin kendi içindeki bir transfer örneği verdik. Matematiğin kendi içindeki transfer gücü başlı başına bir güzellik, bir örüntüdür. Bir fonksiyonun yol, zaman, hız problemlerine uygulanması ise dış transfer özelliği olarak düşünülür. Matematiğin bir başka derste başarıyla kullanılması o dersin öğrenilmesine katkıda bulunmasıdır. Bu da "yararlı matematik" anlamında bir güzelliktir. Yine matematik konusu olarak anlattığımız Modüler aritmetik ve farklı sayma düzenleri; saat aritmetiği, açı ölçüsü birimi olan derecenin as katlarının yorumlanması ve bilgisayar yazılımları gibi alanlarda başarıyla kullanılır. Ancak matematikçilerin, matematiksel buluşları ortaya koyarken, "yaşamsal karşılıkları olmalı" saplantılarının olmayacağını bir kez daha vurgulayalım... Olamaz da. Çünkü böyle bir saplantı özgürce üretmenin önünde engeldir. Matematiksel birçok buluş matematiğin kendi dürtüsü ve uğraşanın merak duygusunun sonucudur.

> Genellikle belirli bir matematiksel düşüncenin uygulamaya geçirilebilmesi yıllar alır. MÖ 3. yüzyılda yaratılan konikler, 17. yüzyıl matematikçilerinin çeşitli eğriler hakkındaki teorileri, formül haline getirmelerinin temeli oldu. Örneğin, Kepler gezegenlerin yörüngelerini elipsler kullanarak tanımladı. Galileo mermilerin yörüngelerinin parabol biçimli olduğunu buldu. (Theoni Pappas, *Yaşayan Matematik*, çev: Yıldız Silier, Doruk Yayınları, s.114)

Heyecan

Bazen bir şiir, bir öykü, bir ezgi ya da bir resim karşısında deyim yerindeyse nutkumuz tutulur. Coşkuya kapılırız, yüreğimiz çarpar. Kimi zaman gökyüzünü arşınlarız, kimi zaman deryalara dalarız. Bir tabloda çiçek kokusunu alırız kimileyin. Kimileyin bir şiirde bebek kokusunu. Matematik derslerinde de benzer duygular yaşanır. Bunu öğretmenler iyi bilir. Soru sorarsınız. Öğrenci uğraşmaya başlar. Önce kaygılı bir yüz. Eli başına gider. Saçlarını karıştırır. Dudaklarını ısırır azıcık. İşin içine beynini, yüreğini katar. Sevecenlikle izlersiniz. Birden bir şimşek çakar içinde, yüzü aydınlanır. Sonra kararlı bir yüz. Sevinç dolu, güven dolu. Ardından bir haykırış "çözdüm!" Bu süreç boyunca bir sanatçının girdaplarını bulursunuz çocukta. Arşimet'in "eureka"sı gibi.

Birçok kez karşılaşılmıştır. Öğrenci heyecanla öğretmenler odasına gelir, "bir teorem buldum" ya da "bir kural buldum" der. Hatta noter tasdiklileri bile olur. Bulunmuşu bulmuşlardır hep. Yine de heyecanı paylaşırsınız. Bulma isteğini, harcadığı emeği paylaşırsınız. Çok basittir bazen bulunan. Ama basit nedir, zor nedir? Benim için uçak kullanmak zor. Pilot için güle oynaya. Önemli olan zor ya da kolay değil, duyulan heyecan.

Akıl oyunu

"Hiçbir matematikçi aklından çıkarmamalıdır. Matematik diğer bütün sanat ve bilim dallarında olduğundan daha çok bir gençlik oyunudur" der bir matematikçi. Yaşamının en az bir döneminde matematik oyunu oynamayan yok gibidir. Bu bir kulüpte satranç veya briç olabilir. Köy kahvesindeki dama, iskambil, okey, domino da olabilir. Ya da evde oynanan sayı oyunları, bulmacalar… Veya:

"1023 yumurtası olan bir satıcı, yumurtalarını elindeki 10 sepete öyle dağıtıyor ki, kaç yumurta istenirse istensin yumurtalara hiç dokunmadan, sadece sepetlerle istenen sayıda yumurtayı veriyor. Yumurtaları 10 sepete nasıl dağıtmalı?" gibi bir soru.



Bu matematiksel oyunlar ya da sorular konuyla doğrudan ilintili olmasa bile, ders etkinliğinin, dikkati toplamanın önemli araçlarından biridir. Çözüm üzerinde yapılan tartışmalar hem heyecan yaratır, hem öğrenmeyi pekiştirir. Örneğin bu soru çözeni bütünden parçaya gitme biçiminde yönlendirmektedir. Düşünmeyi zorlaştıran da budur. Oysa parçadan bütüne (bir anlamda genelleme) gidiş sorunun çözümünü kolaylaştırır. Doğal sayıları yazarak sıralı toplamları gözden geçirelim.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17.....

1 ile 2'nin toplamından 3 elde edilir, 2'nin iki katı yani 4 elde edilemez. 3'ü silebiliriz ama 4'ü silemeyiz. 1, 2, 4 ile 1+2 = 3, 1+4 = 5, 2+4 = 6, 1+2+4 = 7 ara sayıları elde edilir ama 4'ün iki katı 8 elde edilemez. 5, 6, 7 silinir. Aynı düşünüşle 8'den 16'ya kadar olan sayılar toplam olarak elde edilir ve ara sayılar silinir... Sonuçta kalan sayılar: 1, 2, 4, 8, 16, … yani 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5… olacaktır. Öyleyse 2'nin kuvvetleri olan sayılarda yumurtaları ayrı sepetlere koyarak istenilen sayıda yumurta verilebilir.

1023 yumurta için;

birinci sepete, $2^0 = 1$,

ikinci sepete $2^1 = 2$,

üçüncü sepete $2^2 = 4$ ….

ve onuncu sepete $2^9 = 512$ yumurta koyarak en az sayıda sepetle istenilen sayıda yumurta verilir. Bu soru belki şöyle bir tartışmaya neden olabilir. Toplam yumurta sayısı 900 olsaydı en az kaç sepetle istenilen koşul sağlanırdı? İşte burada da $2^9 = 512$ ile $2^{10} = 1024$ arasındaki tüm sayılar için yine aynı sayıda gruplama yapılması gerektiğinin nedeni tartışılabilir. Elbette bu örnekle ulaştığımız sonuç tek yaklaşım değildir. Başka yaklaşımlar da ortaya konulabilir. Yaptığımız çözüm de can alıcı matematiksel bir kuram değil. Sayılarla oynama, sayıların azizliği ve akıl yürütmeye dayalı bir oyun. Hoşluk da burada zaten…

Süreç, kademe, serüven

Merak duygusuyla ya da bir konuyu öğrenmek üzere çalışma-

ya başlar, çalışmaların sonucunda bir çıkarımda bulunursunuz. Ama çoğunlukla bu çıkarım orada bitmez. Çıkarım yeni arayışlara yöneltir sizi. Bu süreç bazen kademe kademe gelişir, bir akıl serüvenine ulaşır.

Diyelim ki "aynı düzleme ait doğruların en çok kaç noktada kesiştiğini" bilmek istiyorsunuz. Sınama yöntemi kullanarak önce "iki" doğruyu düşünür, en çok "1" noktada kesişir dersiniz. Sonra "üç" doğruyu düşünüp (ya da çizip) en çok "3" noktada, "dört" doğru "6" noktada kesişir diye devam edersiniz. Bu arada "bir" doğru için kesişim noktası düşünülemeyeceğinden onun karşılığı olarak da "0"ı belirleyip bulduğunuz sayıları sıralarsınız. "0, 1, 3, 6, 10," biçiminde sıraladığınız sayılar pek anlamlı görünmez. Ama bunu bir çizelgeyle ele alırsanız; 1) ilişkinin kolay görülmesi, 2) sonucu öğrencinin bulması, 3) öğrenmenin kalıcı olması sağlanmış olacaktır. Ve oluşturmacı bir yöntem kullanıldığı için yeni beklentiler ve iç transfer sağlayabilirsiniz.

Doğru	Doğru sayısı	Artan kesişim noktası sayısı	Toplam
	1	0	0
	2	1	0+1=1
	3	2	0+1+2=3
	4	3	0+1+2+3=6
	⋮	⋮	⋮
	n	(n-1)	0+1+2+3+.......+(n-1)=?

On doğru için de: "0+1+2+3+…+9 = 45" sonucunu söylersiniz. Ardından da "*n*" doğru en çok "1+2+3+…+(*n*–1)" noktada kesişir sonucuna ulaşırsınız. Açıklamasını da; her yeni doğru nokta sayısını kendisinin bir eksiği kadar arttırır biçiminde yapabilirsiniz.

"Doğruların kesişmesiyle oluşan en çok nokta sayısı, kesişen doğru sayısının bir eksiği kadar ardışık sayının toplamı kadar-

dır." Bu bir sonuç… Süreç iyi yönetildiğinde, "anlaşılır" ve öğrencinin sıkılmadan hatta haz duyarak ulaşabileceği bir sonuç… Bir de yazarak düşünerek kendi ürettiği bir sonuç… Bu nedenle bu kazanım bağıntı olarak unutulsa bile kısa sürede iki örnek çizimle anımsanabilecek özellikte. Ancak bu kazanımın diğer önemli yanı yeni sorulara yeni kazanımlara açık olması.

"1+2+3+……+(n–1) = ?" eşitliğini gören her öğrenci bu toplamın nasıl bulunacağını merak edecektir. Merak duygusunu tatmin etmeyen bir matematik olamaz. Adım atalım.

Öğrenci Gauss toplamını biliyorsa,

$$1+2+3+...+(n-1)=\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$$

sonucu bulacaktır. Yani dizideki ilk terim ile son terimi toplayıp terim sayısı ile çarpacak ve ikiye bölecektir.

$$1+2+3+...+9=\frac{(9+1).9}{2} \text{ gibi.}$$

Eğer öğrenci "Gauss toplamı" ön bilgisini anımsamıyorsa iki yol var. Birincisi bu bilgiyi bir formül olarak verip ezberlemesini istemek ki çok kullanılan bilgi olduğu için aynı ezber tekrar tekrar istenecektir. İkincisi bilgiye birlikte ulaşarak anımsatmak. Yani "1"den "n"ye kadar sayıların toplamına "x" diyerek ve diziyi artan ve azalan biçimleriyle alt alta yazarak taraf tarafa toplamak:

$$\begin{array}{rl} & 1 + 2 + 3 + \ldots. \ +(n-1)+n = x \\ + & n + (n\text{-}1)+(n\text{-}2) \ \ldots+ 2 + 1 = x \\ \hline & \underbrace{(n+1)+(n+1)+ \ldots \ (n+1)+(n+1)}_{\text{n tane}} = 2x \end{array}$$

ve "n" tane "n+1" olduğunu görerek; $2x = n.(n+1)$'den

$$x=\frac{n(n+1)}{2}$$

sonucuna ulaşmak.

Elbette ikinci yol yeğlenmelidir. Hatta bu sonuç öğrencinin önceden bilmesi gereken bir bilgi olsa bile... Zaman yetersizliği nedeniyle itirazlar olacağını biliyorum. İtirazın haklı yanları olsada ısrarcıyım. Bilgiyi öğrencinin üretmesinin "heyecanı" ve ürettiği bilginin "kalıcılığı" nedeniyle... Bir de bilginin "kullanım alanlarının çokluğu" ve "üretime açık olması" nedeniyle ısrarcıyım.

Hatta daha da ötesi, diyelim ki biraz daha metematiğin içine girmek istiyoruz.

Bize "1+2+3+.......+n = n.(n+1)/2" bağıntısı kalıp olarak verilmiş olsun. Kalıp olarak verilen bu bilginin matematiksel bilgi olabilmesi için kanıtlanması gerekir. İşte bu aşamada Tümevarım olarak adlandırılan ispat yöntemini kullanabiliriz. Eğer önceden biliniyorsa "yararlılık" anlamında iyi bir anımsatma fırsatıdır. Bu yöntem kabaca, verilen bağıntıyı doğru kabul ederek, bir sonraki adımın doğru olduğunu göstermeye dayanır. Yani diğer ispat yöntemlerinde olduğu gibi genellemenin bir yöntemidir.

İlk adım: "$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$" eşitliğinin "$n$ = 1" için doğru olduğunu gösterelim. "n" yerine "1" yazarak $1=\frac{1(1+1)}{2}$ "1 = 1" doğru önermesi bulunur.

İkinci adım: "$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$" eşitliği "$n$" için doğru ise, "$n$"in ardılı olan "$n$+1" için de doğru olmalı ki, eşitlik;

"$1+2+3+...+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$" biçimine gelmeli. Kanıtlanması gereken eşitlik bu.

Üçüncü adım: Doğru varsaydığımız,

"$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$" eşitliğinde her iki yana "n+1" ekleyelim.

"$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$" olur. Eşitliğin ikinci yanını düzenleyerek;

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n^2+n}{2}+\frac{2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

sonucunu elde ederiz. Bu durumda eşitlik,

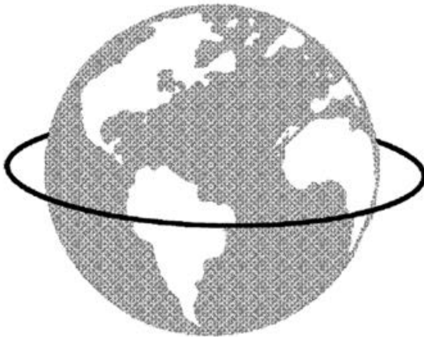
"$1+2+3+...+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$" haline gelir.

Yani; n için doğru varsaydığımız bağıntının "n+1" için de doğru olduğu kanıtlandı. Bir sonraki terim için doğru olan diğer sonraki terimler için de doğru olma genelliğini taşır. O nedenle bağıntı doğrudur.

İlintili olarak verdiğimiz örnekler sürecin biteviyeliği anlamında bir özellik göstermektedir. Süreci belirleyen her kademe kendi içinde bir tutarlılığa sahip olduğu gibi yeni açılımları kışkırtan serüven özelliğine sahiptir. Hatta bu serüven; $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$ gibi toplam sembolü ile gösterimlere ya da Gauss toplamı uygulamasıyla diğer dizi toplamlarının yapılmasına kadar gidebilir.

Şaşırtıcı

Çocukluk çağının en zevkli oyunlarından birisi bilmece sormaktır. Bilmecelerin gizemi ve şaşırtıcılığıdır çocukları çeken. Daha sonra bu oyun, yazarak oynanan akıl oyunlarına ve giderek matematik bilmecelerine, sorularına dönüşür. Nasrettin Hoca, Bektaşi, Karadeniz fıkralarının birçoğu da akıl ve zekâ doludur.



Bazı matematik sorularının sonuçları da şaşırtıcı olması yönüyle her yaştan insana zevk verir. Bilinen sorudur. "Dünya ekvator boyunca 40.000 km'lik (yaklaşık) iple sarılıyor" diye başlar. Ve sorusu ardından gelir. "40.000.000

metrelik bu ipe sadece 1 metre ip ekleniyor. Bu durumda oluşan yeni dairesel halka yerden ne kadar yükselir?" Hatta bu soru, oluşan halkanın altından bir tavşan geçebilir mi gibi sorulur. Gelen kestirimler çoğunlukla "tavşan değil kertenkele bile geçemez" biçimindedir. Öyle ya! 40.000.000 metreye eklenen 1 metrenin lafı mı olur? Ancak gerçek hiç de onu göstermez. Yeni halkanın yerden yüksekliği metrelerle ölçülmese bile şaşıracağımız kadar fazladır.

Çözüm: Dünya'nın yarıçapı "r" olsun. Çevre = $2\pi r$ bağıntısı uygulanarak

$2\pi r = 40.000.000$'den yarıçap $r = 40.000.000/2\pi$ bulunur.

Oluşacak yeni halka 40.000.001 metre olacağı için yeni yarıçap;

$2\pi r_1 = 40.000.001$'den; $r_1 = 40.000.001/2\pi$ ve yarıçaplar arasındaki fark

$r_1 - r = 40.000.001/2\pi - 40.000.000/2\pi = 1/2\pi$ olur. Bu fark aynı zamanda yeni halkanın yerden yüksekliğidir ki, 1 metreyi 100 santimetre ve "π" sayısını "22/7" alırsak; 100 : 2.(22/7) den yaklaşık 16 santimetre bulunur. Bu yükseklik zor da olsa bir tavşanın geçmesi için yeterlidir.

Bu soruyu neden örnek olarak verdim? Ders anlatımında bir hoşluk olsun, ilgiyi arttırsın diye mi? Böyle bir işlevi var. Olabilir. Benzer başka sorular da bu anlamda sorulabilir ve vardır. Ya da dairenin çevresinin yarıçapla ilişkisi daha kalıcı öğrenilsin veya "π" sayısının marifeti anlaşılsın diye mi? Bunlar da olabilir. Ama asıl amacım bu da değil. Öyle olsa başka bir başlık altında bu örnekten söz ederdim. Amaç, şaşırtıcılığın öğrenmedeki önemini vurgulamak. Şaşırmak "beklenmedikle karşılaşmak" olarak ifade edilebilir. Beklenmedikle karşılaşmak ise insanda iki temel duygu yaşatır. Şaşırmak ve korku. Her iki duygu da algıları dürter, kavrayışı kolaylaştırır. Özellikle şaşırmaya neden olan beklenmedikler zekâ ürünü olarak ortaya çıkar. Genel olarak mizahın beslenme kaynağı beklenmedik davranışlar, beklenmedik düşünüşlerdir. Fıkraların pek çoğu böyledir ve unutulmazdır. Bu nedenle öğretimde sık sık başvurulan bir yöntemdir. Hangi sorunun nerede sorulacağı elbette anlatanın seçimiyle ilgilidir.

Matematik nedir sorusunun yanıtı elbette daha kapsamlı olabilir. Ancak biz durumu matematik öğretmek yönüyle ele alıyoruz. Bu nedenle sınırı bu çerçevede tutmaya çalıştık. Hedefimiz matematik öğretmenin ve öğrenmenin gereğine açıklık kazandırmaktı. Aslında yaptığımız "niçin matematik öğrenmek" sorusuna da yanıttı. Yanıtlanmış bile olsa yine de özetleyerek tamamlayalım. Bir matematikçi tavrıyla, madde madde…

-V-
NİÇİN MATEMATİK?

1) Soyut düşünüş ve soyut düşünüşün yöntemi olan akıl yürütme, doğayı anlamanın yönlendirmenin temel unsurudur. Soyut düşünüş ve kuramsallaşma, en gelişmiş biçimini matematikte bulur. O nedenle matematik öğrenilmelidir.

2) Maddeyi niceliksel olarak anlamanın yolu olan matematik insanlık tarihi kadar eskidir. Bu nedenle bilimde ayrıcalıklı bir yere sahiptir. İnsanlığın gelişmesine koşut olarak da gelişmeye devam etmektedir. En eski matematiksel çıkarımlar bile hâlâ tazeliğini korumaktadır. O nedenle bilimin genel olarak gelişmesinin itici gücüdür. Bilimin gelişmesi için matematik öğrenilmelidir.

3) Matematik, özellikle fen alanındaki bilim dallarının anlaşılmasının ve güvenilirliğinin temel aracıdır. Bilimimin anlaşılırlığı ve güvenilirliği için matematik öğrenilmelidir.

4) Matematik ispat bilimidir. Yani aklın ürünüdür ve laboratuvarı akıldır. Bu nedenle mükemmeldir, nettir, yalındır, soyuttur. Soyut olmasına karşın bir o kadar da gerçektir. Diğer ilgi alanlarının çekiştirmelerine ve insan bencilliğine kapalıdır. Bir anlamda "insan için" düşünüşün sigortasıdır. Bu nedenle matematik öğrenilmelidir.

5) Kesinliğine ve katı görünümüne karşın, gizemiyle, yaratıcılığıyla, zorluğuyla, şaşırtıcı coşkusuyla derin bir estetiğe sahiptir. Tarihsel gelişmesi boyunca yarattığı akıl estetiği bir yana yaşadığımız koşullarda da teorem ispatlamak, soru çözmek gibi etkinlikler sanatsal özelliklere ve güzelliğe sahiptir. Güzellikleri nedeniyle de matematik öğrenilmelidir.

ÖĞRENCİLER BUNLARI NE KADAR BİLİYOR?

Eğitim öğretim etkinliğinin iyi olması, öğrenme için tek başına yeterli değildir. Öğrenme, öğretim etkinliğinin ana unsuru olan öğrenen için anlamlı olmalıdır. Öğrenenin "niçin öğrendiğini" bilmesi hakkıdır. Ancak ne yazık ki öğrenciler matematiği niçin öğrenmesi gerektiğini ya hiç bilmiyor ya da çok az biliyor. O nedenle öğrenme coşkusunu yaşayamıyor. Bu söylediklerimiz sadece matematik öğretimi ile ilgili değil elbette. Çocuğun okulla ilk tanıştığı ana kadar uzanır. O nedenle de daha o çağlarda "anlamlı öğrenme" değil "eğlenceli öğrenme" yöntemleri geliştirilir. O yaşlarda belirli ölçüde doğrudur da. Tartışmamız bu değil. Daha ileriki yaşlar. Yani "soyut düşünme" aşamasına geçtiğimiz yıllar. Öğrencilere "soyut düşünme" yi öğretmek hedefiyle yola çıkıyoruz, ama öğrenci "soyut düşünmenin gereğini" bilmiyor.

Çünkü matematiği anlatıyoruz ama matematiğin gereğini anlatmıyoruz. Açık söylemek gerekirse biz de pek iyi bilmiyoruz. Çünkü öğretmen olarak bizi yetiştirenler de bunu yeterince anlatmadı. Çünkü programda yok. Öğretmen yetiştiren okullarda matematiksel düşünüş, matematik tarihi, eğitim felsefesi gibi dersler, konular olsa da onlar birer "ders"tir. Okunur, notu alınır, geçilir ve unutulur... Bu konuda çözüm olmasa bile olumlu olan bir örnekten söz edelim.

Milli Eğitim Bakanlığı'nın 1992 baskılı "Ortaöğretim Matematik Dersi Programları" adlı kitabının giriş bölümü şu başlık ve ara başlıklardan oluşuyordu:

"- Matematik öğretimi: Matematik nedir? Matematiğin İşlevleri."

"- Matematiğin Gelişimi: Tarih Öncesinde Matematik, Mezo-

potamya, Mısır ve Hindistan'da Matematik, İskenderiye Okulu, İyonya' da Matematik, Çağdaş Matematiğin doğuşu."

"- Neden Matematik Öğreniyoruz: Matematik uygarlığın aracıdır, Bütün bunları matematikle yapıyoruz, Matematik bilim ve teknolojinin aracıdır."

"- Matematik Öğreniminin Genel Amaçları."

Başlıklar ayrıntılandırılmış. İçerik oldukça derli toplu ve güzel. Programı hazırlayanlar bunun gereğini duymuşlar ve yazmışlar. Bu kitap o yıllarda tüm okullara dağıtıldı. Kitabın girişine bu programın konulması öğretmenlerde matematik kültürü ile ilgili bir "hatırlatma" olarak algılandı. Okuduk… O kadar. Hiç olmazsa ilk derste bu bölüm okunmalı gibi bir not düşülseydi. En azından öğrenciler için derse giriş motivasyonu yaratabilirdi. O bölümleri yıllık planlara alan okulların olduğuna rastlamadım. Sanırım okumayan öğretmenler de az değildir. Niye okusun ki? Öğretmenin sorunu başka. Sorun; "konuları nasıl yetiştiririm", "matematiği nasıl dinlenilir hale getiririm", "üniversite sınavlarında kaç soru çözdürebilirim?"… Tüm bu sıkıntılara karşın bazı öğretmen arkadaşların, yeri geldikçe kısaca da olsa matematiğin önemini, gereğini, seyrini anlattığını biliyorum. Bu kadarı bile matematiğe ilgisi olsun veya olmasın tüm öğrencilerde; niçin bu okulda oldukları, niçin bu sıralarda oturdukları daha anlamlı hale geliyordu. Ama dediğim gibi az sayıdaydı ve gelir geçer etkilerdi bunlar. "Biz bunları neden öğreniyoruz" yakınmalarını ortadan kaldıramadı.

YAKINMALAR

Öğrenciler yakınır: "Ortaokulda matematiğim iyiydi ama lise konularını anlayamıyorum", "Matematiği sevmiyorum", "Geometriyi yapamıyorum", "Geometri görmek işi. Ben göremiyorum", "Trigonometriyi ezberleyemiyorum", "Türev ve İntegral çok zor, anlayamıyorum", "Problemleri çözemiyorum", "Parabolü anladım, ama soruları çözemiyorum", "Öğretmenin derste verdiği örnekleri yapabiliyorum. Ama sınavda sorduğu sorular çok zor", "Üslü sayıları karıştırıyorum", "Üslü sayıları çözüyorum ama köklü sayıları çözemiyorum", "Öğretmen çok hızlı

anlatıyor", "Sınıfta çok gürültü oluyor", "Formülleri ezberleyemiyorum", "Analitiği yapamıyorum"... Ortak yan: "öğrenme zorluğu".

Öğretmenler yakınır: "Zaman yetmiyor", "Öğrenciler çalışmıyor, ödev yapmıyor", "müfredat çok yüklü", "Öğrenciler nasıl çalışacağını bilmiyor", "Kitaplar yetersiz", "Sık sık müfredat değişiyor", "Kitaplarda çok hata var", "Öğrenciler ilköğretimde iyi yetişmiyor"... Ortak yan: "planlama yetersizliği".

Veliler yakınır: "Çocuğum matematikten korkuyor", "Geometriyi göremiyor", "çok çalışıyor ama yapamıyor", "matematikten kaçıyor", "diğer dersleri yapıyor ama matematiği yapamıyor", "matematiği sevmiyor"... Ortak yan: "matematiğin zorluğu".

Bu kadar yakınmanın olduğu ders ya da öğrenme alanı yoktur sanırım. Yakınmalar doğal elbette ve üzerinde durulması gereken gerçekleri yansıtıyor. Yakınmaların ötesinde işi "matematik bilmek şart mı", "bu kadar matematiğe ne gerek var" saçmalığına vardıranlar var ki elbette onlara söylenecek sözümüz yok.

Yukarıdaki yakınmalar eğitim çevrelerinin saptamaları ile de uyum göstermektedir. Örneğin Buca Eğitim Fakültesi'nden emekli öğretim görevlisi Şükran Gözen, *Matematik ve Öğretimi* adlı kitabında, "Ülkemiz Koşullarında Matematik Öğretmeninin Karşılaşacağı Başlıca Güçlükler"i şöyle sıralıyor:

"1) Matematik korkusu-önyargı; 2) Konunun öğrenci için ilginç olmaması; 3) Çocukta matematik yeteneğinin gelişmemiş olması; 4) Çalışma yöntemini bilmeme; 5) Öğrenciler arasındaki bireysel farklılıklar."

Bu saptamalara başka eklemeler de yapılabilir. Ama ne olursa olsun Şükran Gözen'in saptamaları ya da yapılacak diğer saptamalar ve yukarıda sıraladığımız yakınmalar matematik öğretiminin gerekliliğini yadsımıyor. Çünkü bu saptamalar bir döneme ya da günümüze ilişkin saptamalar değil. Sadece ülkemize ilişkin de değil. İnsanlar matematik öğrenmeye başladığı andan itibaren ve de her toplumda öğrenme sorunları olmuştur. Buna karşın matematik öğrenme-öğretme de hep önemli olmuştur.

Karşılaşılan zorlukları biraz daha derli toplu ele alırsak bunları, matematiğin kendisinden kaynaklanan zorluklar, plânlamadan (müfredat ve öğretim yöntemleri) kaynaklanan zorluklar, çevresel etkilerden, öğrenciden ve öğretmenden kaynaklanan zorluklar biçiminde sıralayabiliriz. Öğreten öğrettiğinin ne denli önemli olduğunu, öğrenen öğrendiğinin ne denli önemli ve gerekli olduğunu bilmezse, öğretmen müfredatta yazılı olanları aktaran "memur", öğrenci arabaların arkasına yazıldığı gibi "liselim" olmaktan öteye geçemez… Liseler de üniversitelerin "çırak" kursları olarak kalır.

MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE KARŞILAŞILAN ZORLUKLAR

Karşılaşılan zorlukları sıralarken şunu yeniden vurgulayalım. Matematiğin doğası zordur. Yeni bir dil öğreneceksiniz, yeni kavramları eksiksiz içselleştireceksiniz, bilinen nesneleri yeni nesnelere dönüştürecek ayrıca var olmayan nesneler öğreneceksiniz ve inanmak yetmeyecek kanıtlayacaksınız… Kolay mı bu? Elbette değil. Matematiği öğreten de öğrenen de bu zorluğu bilerek işe başlayacak. Birkaç başlık altında özetleyeceğimiz zorluklar yaşanan ve uygulamadan çıkan somut sonuçlar olacaktır. Bu sonuçlara göre de önerilere geçeceğiz.

Hedef belirsizliği

Lise matematik öğretiminin hedefi, dört yıl içinde planlanan matematiksel yetkinliği kazandırmaktır. Yani lisedeki matematik öğretimi, lise bittiğinde "…" davranışlarını kazanmış olmak hedefi ile planlanır. Üniversiteye hazırlanmak, hatta "üniversitenin şu bölümüne girmek" ya da "yurt dışında okumak" gibi hedefler bu planlamada yer almamalıdır. Ancak gerçeğin bu olmadığını herkes bilir. Okullar için belirlenen matematik programları "işin gereğini yapmak"la sınırlı kalır. Öğrenci lise öğretiminin hedefleri ile yaşamın dayattığı hedefler arasında bocalar. Çünkü bu ikilem ne yazık ki okullardaki matematik öğretimini ıskartaya çıkarır. Başarının ölçüsünü değiştirir. Okuldaki öğretmen önce elindeki öğretim programını uygulamak için direnir. Sonra teslim olur. Lisede okutulacak matematik, dershanede okutulan matematiğin kopyası haline gelir.

Önemini kavramamak

Matematik öğretiminin hedefleri üniversiteye giriş gibi dar bir kalıba sıkıştırılırsa "matematik bilmek ile hesap yapabilmeyi" karıştıran birileri "bu kadar matematiğe gerek yok" düşüncesini savunur, ne yazık ki yandaş da bulur. Giderek yaygınlaşan bu eğilim toplumda matematik öğrenmenin önemini azaltmaktadır. Hatta "öğrenmemeyi" meşru kılmaktadır. Oysa anlatmaya çalıştığımız gibi matematik herkes için gereklidir ve haktır. Özellikle okullarda öğretime konu olan matematik herkes için "önemli" olan matematiktir. Bu önem doğru kavranmalıdır. Programdan, öğretim yöntemlerinden ve toplumsal dayatmalardan kaynaklanan öğrenme zorluğu, "matematiği herkes yapamaz" yargısını geliştirmektedir. Bu da "matematik zeki insanların işidir" yargısını beslemektedir. Bu kötü bir gidiş. Çünkü okullarda okutulan matematik üst seviyede bir matematik değil. Eğer program ve öğretim yöntemleri doğru ele alınırsa, matematiğin gerekliliği ve hazzı kavratılırsa matematik "öğrenilir" hale gelir.

"Matematik zeki insanların işidir" yargısının olumsuz diğer sonucu, matematiği "elitin işi" olmaya doğru sürüklemektedir. Hızla artan denetimsiz matematik yarışmaları bu olumsuzluğa çanak tutar hale gelmiştir. Matematiğe özel ilgisi olan öğrencileri teşvik etmesi gereken yarışmalar, okullarda matematik başarısının kıstası haline gelmekte, okulların reklam aracına dönüşmektedir. Ayrıca bu yarışmalar çoğunlukla objektiflikten de uzaktır. Çünkü öğrencilerden çok öğretmenler yarışmaktadır. Ya da yarışmalar devşirme projelerin yarışması haline dönüşmektedir.

Öğrenmeyi bilmemek

Öğrenciler matematikten korkuyor! Doğru. Öğrencilerin matematik öğrenme konusunda önyargıları var! Bu da doğru. Ama doğru olmalarının durum saptaması dışında hiçbir önemi yok. Önemli olan nedenler… Korkunun da önyargıların da kaynağı yukarıda söz ettiğimiz matematiğin kendisi, planlama ve öğretimi. Yani öğrencinin dışındaki etmenler. Bir diğer yanı ise nasıl çalışması gerektiğini bilmemek veya yanlış çalışma alışkanlıkları. Ve ne yazık ki nedenleri yine dışsal, çoğunlukla da yanlış yön-

lendirmeler. Ve de ne yazık ki bu da genellikle "eğitimci"lerce yapılıyor. Çok soru çöz, çok çalış vb. yönlendirmeleriyle. Oysa son yıllarda "öğrenmeyi öğrenmek" lafı ağızlara sakız olan laflardan biri! Başarıyı, öğrenmeyi sloganlara indirgemek dışında hiçbir anlamı olmayan… "$a^m/a^n = a^{m-n}$" olduğunu bilen öğrenci bunun nedenini bilmiyorsa istediği kadar soru çözsün. Mutlaka bir yerde başarısızlığa uğrayacaktır.

Öğretenin yetersizliği

Öğretmenin yetersizliği iki biçimde ortaya çıkmaktadır. Birincisi pedagojik (mesleki) yetersizlik. İkincisi alan bilgisi yetersizliği. Çünkü mesleki yeterlilik "birkaç aylık kurs"larla, alan bilgisi "öğrencilere neler öğretilecek" ile sınırlandırılmaktadır. Bunun kaynağı da öğretmen yetiştirme politikalarındaki yanlışlardır. Ne yazık ki bir eğitim fakültesindeki sınavda bir öğretmen diğerine "bunlar öğretmen olacak, zor soru sormayalım o kadar matematik bilmeleri gerekmiyor" diyebilmektedir. Elbette öğretmenin işi "matematik yapmak" değildir. Öğretmen anlatması gereken konuları iyi bilmeli ve iyi anlatmalıdır. Ancak bütüne yeterince hâkim değilseniz, parçayı yeterince anlatamazsınız. Elbette vurguladığımız gibi alan bilgisini, matematik felsefesi, matematik tarihi, genel olarak da matematik kültüründen bağımsız düşünemeyiz. Eğitim fakültelerinin öğretmenleri donanımlı alan bilgisi ve mesleki yeterliliğe sahip olarak yetiştirmesi de yetmez. Matematik öğretmeni "sürekli araştırma ve gelişme alışkanlığına" sahip olarak yetiştirilmelidir. Çünkü matematik, öğrenme etkinlikleri ve matematik öğretimi yerinde saymaz.

Diyelim ki "matematik öğrenmek gerekir" noktasında ikna olduk ve öğrencileri ikna ettik. Matematiğin her meslek için daha da genel söylersek "insan" için gerekli olduğunda da birleştik. O zaman da soru şu: İnsan için önemli olan matematik nedir?

-VI-
HANGİ MATEMATİK?

"Matematik bağımsız bir bilim midir" sorusu matematikçiler ve bilim felsefecilerince tartışılır. Bazıları matematiği bilimlerin kraliçesi olarak tanımlar. Bu anlatım matematik bilimdir diye de anlaşılabilir, bilim değildir diye de. Kraliçe onlardan biri olabileceği gibi, onların üzerinde bir varlık da olabilir. Nasıl anlaşılırsa anlaşılsın burada anlatılan matematiğin "yüce bir şey olduğu"dur. Bazıları "matematik bilimlerin hizmetkârıdır" der. Kraliçe olmakla çelişiyor gibi… Oysa değil. Bu anlatımda da olmazsa olmazlığın ve emeğin "yüce"liği var. Bazıları; matematik "bilimlerin niceliksel ifadesidir" biçiminde tanımlar. Bir tanım olmasa bile bu anlatım bana "en" uygunmuş gibi görünüyor. Alçakgönüllü bir "yüce"lik içerdiğinden olsa gerek…

Ayrıca matematik bir dildir, matematik bir kültürdür, matematik sanattır, matematik mantıktır… gibi anlatılar da var. Bu anlatılar tanımdan çok matematiğin özelliklerini, ilişkilerini kavramaya katkı sağlar. Okuyana matematikle ilgili yeni bakış açıları kazandırır. Ben matematikle ilgili yeni bir kitap yeni bir makale okuduğum her zaman etkilenmişimdir. Serüven kahramanı gibi gelmiştir bana matematik. Devamı olan… Yeni serüvenlere açık. Her okumadan

sonra anlatacaklarım, paylaşacaklarım artar. Öğreneceklerim de… Ama kendimi daha iyi hissederim. Öğretmen olma duygusu belki.

Matematikçiler arasında da iki ana eğilim, iki ana damar vardır. Pür (teorik) matematikçiler, uygulamalı matematikçiler. Pür matematikçiler matematiğin kendi iç tutarlılığını, derinliğini öne çıkarırken, uygulamalı matematikçi biraz mühendis gibi düşünür. Onun uğraş alanı yararlılık ilkesine bağlıdır çünkü. Bu ayrım ve tartışma da oldukça ilginçtir. Ama biz konumuz gereği tartışmanın ayrıntıları ile değil eğitim alanına yansıması üzerinde duracağız. Çünkü bu farklılık öğretimi doğrudan ilgilendiriyor. Matematik öğretiminin iki ana amacı, öğrencilere duyuşsal (akıl yürütme, sistemli düşünme, estetik…) ve bilişsel (bilme ağırlıklı) özellikler kazandırmaktır. Bunlardan birincisi daha çok pür matematiğin, ikincisi uygulamalı matematiğin alanına girer. Okullarda uygulanan matematik incelendiğinde ikinci alanın yani uygulamalı ya da bilgi ağırlıklı diyebileceğimiz matematiğin öne çıktığını görüyoruz. Bunu yararlılık esas olduğu için "yararlı matematik" başlığıyla ele alacağız. Akıl yürütmenin, sistemli düşünebilmenin ve sonuçta estetik özelliğin öne çıktığı matematiği ise "estetik matematik" olarak incelemeye çalışacağız.

Giderek daha fazla uygulamalı matematiğin öne çıkarılmasının iki nedeni olmalı. Birincisi uygulamalı matematiğin yaşamla ilişkisinin kolay olması yani anlaşılabilme kolaylığı, ikincisi de diğer derslerin öğrenilmesi için zorunluluk. Bu anlaşılabilir. İlkokul ve ortaokulda modellemelere, yaşamsal örneklere yer vermek elbette önemli. Lise öğretiminde de. Ama ortaokul ve hele de lise matematik öğretiminde matematiksel düşünmenin, soyutlamanın hakkını vermek gerekir. Yoksa matematik öğretimi "hesap yapma"ya indirgenmiş olur. O zaman da "ne işime yarayacak" sorusu, "anlattıklarınızı bilgisayarın bir tuşuna basarak yapıyoruz, bizi neden uğraştırıyorsunuz" sorusuna dönüşür.

YARARLI MATEMATİK

Yararlı matematiğin "bilme" ağırlıklı olduğunu söyledik. O nedenle bu başlığı bilim, bilgi ve matematiksel bilgi dizgesiyle tartışalım.

Bilim

Yukarıda belirttiğimiz gibi yararlı matematik, kendisi bilim olarak tanımlandığı gibi, tüm bilimlerin hatta yaşamın açıklayıcısı olarak da tanımlanır. O nedenle bu bölüme bilimi tanımlayarak başlamaya niyetlendim. Bir yerlerden hazır tanımlar bulabilirdim. Ansiklopedik olmasın dedim. Sonra başladım düşünmeye.

Bilimin uğraş alanı neydi? Evren…

Evrenin nesiyle uğraşıyordu bilim? Nesneleri ve olaylarıyla…

Evrenin nesneleri biliniyor muydu? Bazıları biliniyordu…

Bilinmeyenlerle de uğraşıyor muydu bilim? Bilmeye çalışıyordu…

Orada bilinebilecek bir nesne olduğunu nasıl anlıyordu bilim? Sezgiyle…

Nesneler hep görünen dokunulan şeyler midir? Hayır…

Görünmeyenlerle de uğraşıyor mu bilim? Evet uğraşıyor…

Görünmeyenlerle nasıl uğraşıyor? Akıl yürüterek ve mantıkla…

Nesneler ve olaylarla nasıl uğraşıyor bilim? Onları inceleyerek…

İnceleme nereye kadar? Genelleme yapıncaya kadar…

Genelleme yapınca ne oluyor? Kuramlar oluşuyor…

Kuramlar kesin mi? Şüpheli…

Bu ve devam edebilecek sorulara kolayca yanıt verebilsem tanımı yapıverecektim. Zor geldi, yapamadım. Tam da burada "tanım nedir" sorusuna takıldım. Öyleyse önce tanımı tanımlayayım dedim becerebilirsem… İşin kolayına kaçtım, sözlüğe baktım. "Bir şeyi nitelikleriyle ortaya koymak" diye tanımlanıyor tanım. Yeterli gelmedi. Birçok zaman benzer şeylerin nitelikleri iç içe geçer. Ayırt etmek zordur. Oysa matematikçi için ne kadar önemlidir tanım. Biraz üzerinde durmayı hak ediyor sanırım. Daha önce de sözünü ettiğim insanın tanımını düşündüm. Çocukluğumdan beri bir türlü netleştiğini görmediğim "insan"ın tanımı nedir? Konuşan hayvan denir insan için, birisi çıkar konuşan başka hayvanlar gösterir. Düşünen hayvandır der birisi, düşünen hayvana zıt örnek verir bir diğeri. Alet yapan hayvandır denir, onu da çürüten örnekler bulunur… Devam eder gider. Hatta bir aklıevvel çıkar âşık olan hayvandır der, öbürü sevişme-

nin en tutkulusunun diğer canlılarda olduğunu söyler. Biraz ironik bir yaklaşım olacak ama bu çabalamaların en doğrusu "türünü yok eden canlı" demek gibi gelir bana. Biraz da utançla. Ama bu da yetmez. Yavrusunu yiyen kediyi düşünürsün arkasından. Ve sonuç olarak biz bizi bir türlü tanımlayamayız. Burada dikkat edilirse tanımlamak için ortak olan bir çaba vardır. O da insanı benzerlerinden ayırma kaygısı. Öyleyse tanım yapmayı; bir şeyin niteliklerini ortaya koymanın ötesinde; "bir şeyi benzerlerinden ayırmak" çabası olarak anlatabiliriz.

Bu noktada da başka bir zorlukla karşılaşırız. O da tanımı yaptığımız kişinin (dinleyenin) birikimi ve tanımı yapanın anlatım yeteneği ölçüsüdür. Örneğin merak duygusu çok yüksek olan küçük bir çocuğun, leyleği göstererek "bu ne" sorusunu sorduğunu düşünelim. Yanıt; "bir kuş" biçimindeyse, bu yanıtın "ağaç değil" demekten bir farkı yok. "Göçmen kuştur" yanıtı, hem yeterli değil hem de aydınlatıcı değil. Ayrıca göçmen kuştur dediğinizde çocuk size "göçmen ne?" sorusunu sorabilir. "Uzun bacaklı, uzun gagalı göçmen bir kuştur" dersiniz bu kez gagayı sorar. Gagayı anlatmaya başlarsınız büyük bir olasılıkla. Gagayı anlatırken yeni kavramlar, ardından yeni sorular ortaya çıkar. Sonuçta "yeter be!" noktasına gelebilirsiniz. Bu örnek bize bir şeyi daha gösterir. Tanım yapmak ile anlatmak kavramlarının çoğu zaman iç içe geçtiğini. Tanım, anlatma eyleminin özel halidir denilebilir. Daha kısa biçimde "anlatmanın özetidir" demek de yanlış olmaz sanırım. Tanım yöntem olarak, bilinenden bilinmeyene bir yol izler. Bu yol tümdengelim diyebileceğimiz ve günlük yaşamda çok kullandığımız yöntemdir. Bir başka yanıyla tanım "ilkelden karmaşığa" doğrudur. Yani bir şeyi tanımlamak için, o kavramın ilkellerinden yola çıkmak, onlara dayanmak zorundasınız. Buna tümevarım yöntemi diyebilirsiniz. Ancak bu noktada da bir sorunla karşılaşırız. O da en ilkelin tanımıdır. En ilkelin tanımı ise ne yazık ki olanaksızdır. Örneğin "üçgen nedir?" sorusunun yanıtı "doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren doğru parçalarının birleşimidir" biçiminde olabilir. Ardından "doğru parçası nedir?" sorusu gelir. Tanımlama değildir ama doğru parçasını kendisini oluşturan noktalar kümesi biçimin-

de açıklamaya çalışırsınız. Hadi bunu da atlattık derken "nokta nedir?" sorusuyla karşılaşırız ki, bu sözün bittiği daha başka ifadeyle tanımın iflas ettiği yerdir. Çünkü noktanın daha ilkeli yoktur. En temel geometrik kavramdır. O nedenle de tanımsızdır. Bilimde bu tür terimler çokça vardır ve bu tür terimlere tanımsız terim adı verilir. Tanımın tanımından, "tanımsız terim" çıkardık. Olsun o da bir şeydir. Hem de önemli bir şey.

"Bilimi tanımlamak"tan yola çıktık ama daha tanımlamaya başlamadan ipe un serdik. Aslında biz sermedik zaten seriliydi. Tanımlamaya kalkarsak daha da açmazlara düşeriz. En iyisi yöntem değiştirelim ve bilimin özelliklerini gözden geçirelim. Yukarıdaki sorgulamalar ve Cemal Yıldırım'ın, *Matematiksel Düşünme* (Remzi Kitabevi) kitabı yol göstericiliğinde…

Bilimin özellikleri

Bilim olgusaldır. Bilimin, doğayı, doğadaki olayları, bunların nasıl ve neden olduklarını anlama etkinliği olduğunu söyledik. Cisimlerin hareketi, nesnelerin rengi, kokusu, ağırlığı… Canlıların davranışı, gelişimi vb. Bu anlama etkinliği, gözlem - algılama - sezgi - deney ve kuramlaşma biçiminde bir yol izler. Bu etkinlik sürecinin sonu deneylerle kanıtlanmış "bilimsel bilgi"ye ulaşmaktır. Bilimsel bilgi kuramsallaşma aşamasının bir sonucudur ve genellikle matematiksel yöntemlerle ulaşılan bir hedeftir.

Bilim seçicidir. Evrende sonsuz olgu vardır. Bilim bunların bazılarıyla uğraşır. İlginç olanları, farklı olanları henüz bilinemeyenleri seçer onlarla uğraşır. Bazı canlılar neden-nasıl uçar, deprem neden olur, insan nasıl düşünür gibi. Bir de insanlığın karşılaşacağı sorunlarla ilgilenir. Açlık, susuzluk, hastalık gibi insanlığı bekleyen tehlikelere çözüm arar.

Bilim objektiftir. Objektiflik bir anlamda yansızlıktır. Buna gerçeği arama ideali de denilebilir. Çünkü mutlak objektiflik yoktur. Objektif olma çabası vardır. Koşullar ve bilimcinin eğilimleri objektiflik ölçüsünü tartışmalı kılar. Örneğin bir okul laboratuarında yapılan araştırma çalışmasıyla, profesyonelce donatılmış laboratuvardaki araştırma elbette karşılaştırılamaz. Veya hipotezi kanıtlamaya çalışan bilimci yapacağı deneyleri

etkileyecek bazı etmenleri gözden kaçırabilir. Ya da bulgular inandıklarına ters düşebilir. Bilimci inançlarını bir yana bırakır. Ama yine de bilim her şeye karşın objektiftir diyoruz. Olması gerektiği için… Objektifliğin ölçüsü güvenilirliktir. İnsanların, izleyenlerin bulgulara güvenmesi gerekir. O nedenle de bilim insanlara açık olmalıdır.

Bilim mantıksaldır. Yaşamdaki olgu ya da olayları izler, gelişmeyi sezer, kuram oluşturur, dener, kanıtlar ve sınar. Bu genel döngü bütünüyle bir mantık sıralamasıdır. Mantık çıkarımların genel aracıdır. Aynı zamanda tutarlılığın sigortasıdır. Mantık ilkelerinin geçerli olmadığı koşullarda bilim olmaz.

Bilim eleştiricidir. Her teori ya da görüş olgular tarafından desteklendiği sürece "doğru" kabul edilir. Ancak bilgi ne denli kabul görürse görsün eleştirel bakış ve kuşkuculuk sürer. Eğer kuşkuculuk sürmeseydi atom maddenin en küçük yapısı olarak algılanmaya devam edilirdi. Veya Güneş'in hâlâ Dünya'nın çevresinde döndüğünü sanıyor olurduk.

Bilim genelleyicidir. Seçilen bir alanda yapılan deney ve gözlemler bilimciyi genel çıkarımlara götürür. Demirin, bakırın, çinkonun ısıtılınca genleştiğini gören bilimci "metallerin ısıtılınca genleştiği" genellemesine ulaşır. Bu yargıya varırken de tüm metalleri tek tek denemesi gerekmez. Katıların genel özelliklerinin aynılığını bilmesi böyle bir genelleme için yeterlidir.

Bunlar bilime ilişkin bazı özellikler. Ayrıntıya girilirse yeni eklemeler yapılabilir. Amacımız bilimin davranış biçimini tartışmak. Newton'un şu meşhur elma hikâyesini ele alalım. Hani elma ağacının altında oturuyormuş, kafasına elma düşmüş ve yerçekimi yasasını bulmuş ya! İşte o. Yukarıda sıraladığımız özellikler yönüyle gözden geçirelim. Elmanın düşmesi bir olgu. Newton diğer cisimlerin de düştüğünü gözleyerek, düşme olayını incelemeyi seçiyor. Bir tüy ile elmanın düşüşlerindeki farklılığı karşılaştırıyor. Ya da kuşun nasıl uçtuğunu, düşmediğini… Belki inançlı birisi Newton… Ama "tanrı buyurduğu için düştü" demiyor. İnançlarından bağımsız yani objektif düşünüyor. Olayı düşünürken yaşadığı mantıksal süreçle de yetinmiyor. İncelemeyi laboratuara taşıyor. Sürtünmesiz ortamda da düşmeyi in-

celiyor. Defalarca deniyor. Deney sonuçlarını yazıyor. Yazılanların bir kurala bağlı olabileceği hipotezini doğrulamaya çalışıyor. Sonuçta hipotezi genelleyerek kurama dönüştürüyor. Yerçekimi yasası adı altında kamuoyunun ve bilim çevrelerinin eleştirisine ve onayına sunuyor. Deneylerin sonucunu sayısal verilerle ve formülle açıklıyor. Yani matematiksel aşamayı da tamamlıyor. Kuramın güvenilirliğini sağlıyor. "Bilimsel bilgi"ye ulaşılıyor.

Bilgi

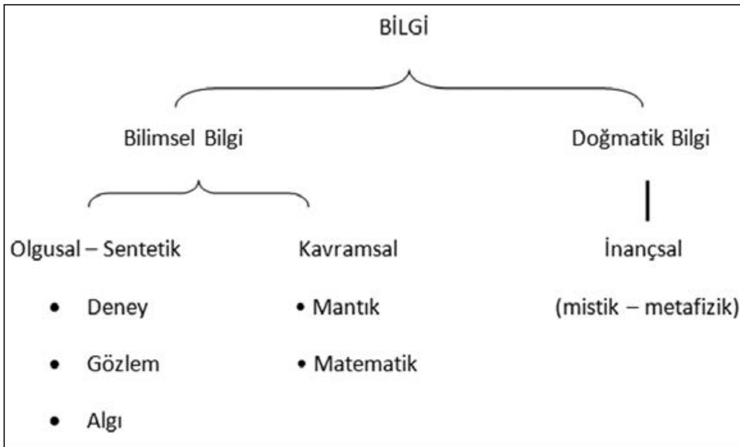
Olguların ele alınması ve anlaşılması sonucunda "bilimsel bilgi" dediğimiz yargılar oluşur. Öyleyse bilgiyi (bilimsel olsun veya olmasın) yargı bildiren, (kanıtlanmış veya inanca dayanan) tümceler olarak tanımlayabiliriz. Elbette her yargı bildiren tümcenin bilgi olmadığını göz ardı etmeden. Örneğin "sivri olan şeyler sivridir" biçimindeki tümce bir bilgi değildir. Anlamsız ve hatta saçmadır. Oysa "sivri olan şeyler batar" önermesi bir bilgidir. Bu bilgiyi içselleştirebilmek için "sivri" ve "batmak" kavramlarını bilmek yeterlidir.

Yukarıda sıraladığımız bilime ait özellikler, bilimin uğraş alanlarının, hedeflerinin, kullandığı yöntemlerin, merkezinde "insan" olan dünyaya ilişkin olduğunun göstergesidir. Merkezinde insan olunca da, insanın, bir yandan maddi dünyaya ilişkin yanıyla uğraşırken, diğer yandan, sosyal varlık olan insanın sosyal yanıyla uğraşır. Bu iki temel uğraş alanına bağlı olarak da bilim, pozitif bilimler (fizik, kimya, biyoloji…) ve sosyal bilimler (felsefe, psikoloji, tarih vb.) olmak üzere ikiye ayrılabilir. Her ne kadar bu ayrım tartışmalı da olsa ve hatta saydıklarımızın bazıları, bazı bilim felsefecilerince bilim sayılmasa da bir gerçek vardır ki değişmez. Bilimsel çalışmalar sonucunda ortaya çıkan sonuçlar "bilimsel bilgi" olarak adlandırılır. Bilimsel bilgi mantıksaldır, deneye veya kanıta dayanır. Ancak bilimsel olmayan, inanca dayanan ve kanıta dayanmayan bilgiler vardır ki bunlar "dogmatik bilgi" olarak adlandırılır.

Var olduğundan bu yana insan, parçası olduğu dünyayı anlamaya, doğa olaylarını açıklamaya ve ona uygun tutum almaya çalışmıştır. Elbette bunu yaparken de en önemli olan yetisini

yani aklını kullanmıştır. Örneğin gök gürültüsünün ardından yağmur geleceğini öğrenerek ıslanmamak için ağaç altına saklanmayı, şiddetli yağmurun yıldırım düşmesine yol açtığını görerek de ağaç altı yerine taş kovuğunda saklanmayı öğrenmiştir. Doğa karşısında güçlü olmanın yolu olarak toplu yaşamayı ve bunun sonucunda da toplu yaşamanın ilkelerini öğrenmiştir. Sezgilere ve deneylere dayalı bu öğrenme, dayanışma, birlikte yaşama, örgütlenme, kurallar koyma gibi düşünsel etkinliklerin gelişmesine giderek de felsefenin ve dinin ortaya çıkmasına yol açmıştır.

İnsanlık tarihi kadar eski olan din ve felsefe zaman zaman çelişse de başlangıçta daha çok uzlaşma temelinde gelişmiştir. Ta ki bilimin ortaya çıkışına dek… Bilimin ortaya çıkışı ise "inanmak" yerine "anlamak" tutumunu ortaya çıkarmış, böyle olunca da din ile bilimin, bağlı olarak da din ile felsefenin ayrışması kaçınılmaz olmuştur. Bu etkinliklere göre biçimlenen bilgiyi aşağıdaki gibi ayrımlandırabiliriz.



Yukarıdaki çizelgeyle pek yapılmayanı yaptık. Tartışmalara açık olduğunu bilerek… Bilginin iki ana akımı ayrımında pek tartışma olacağını sanmıyorum.

Bilginin iki ana akımı, bilimsel bilgi ve dogmatik bilgidir. Bi-

limsel bilgi deney, gözlem ve araştırmalar sonucunda akıl yürütmeyle ulaşılan bilgidir. Dogmatik bilgi inanca dayanır. İnanca bağlı olarak dünyayı açıklamaya çalışır. Oluşumunda deney, gözlem ve araştırma yoktur. O nedenle tartışma da yoktur. Olsa bile iç tartışmadır. Bilimsel bilgiyi ise, olgusal-sentetik ve kavramsal-analitik içerikli olarak ayrımlandırabiliriz. Olgusal ve kavramsal bilgiyi iki örnekle karşılaştıralım.

"Isınan su buharlaşır" önermesi: Su, buhar, ateş yaşamın nesneleridir. Görülebilen, dokunulabilen… Bilimci suyun buharlaşmasını gözler. Suyun hangi koşullarda buharlaştığını anlamak için deneyler yapar. Deneylerin sonucunda " su, … koşullarında buharlaşır" yargısı ile ulaştığı sonucu kuramsallaştırır. Kuramın doğruluğu yeterince sınama ve denemeyle test eder. Kamuoyuna sunar. Kamuoyunun onayından sonra bilgi kesinleşir. Kesinliği yeni bir bilginin o bilgiyi yadsımasına dek sürer. Bilgiye ulaşılana dek kullanılan dil bazı özel terimler dışında günlük yaşamda kullanılan dildir. Kullanılan yöntem tümevarım yöntemidir. Üretilen bilgi bilimseldir ve olgulara bağlı olarak oluşturulan (sentetik) yapıdadır.

Matematiksel bilgi

"Üç ile beşin çarpımı on beş eder" biçimindeki matematiksel önermeyi alalım: "üç, beş, on beş, çarpım" gibi şeyler yaşamda yoktur bunlar matematiğin nesneleridir. İnceleme alanı matematiğin dünyasıdır. Üç ile beşin çarpımının on beş ettiği gözleme dayanmaz. Ön tanım (çarpmanın kısa yolu toplamadır gibi) ya da önceden kanıtlanmış teoremlere bağlı olarak yargıya varılır. Kanıtlanamayan bilgi matematiksel bilgi değildir. Ulaşılan bilgi kesindir. Kullanılan dil matematiğin özel dilidir ($3 \times 5 = 15$) ve evrenseldir. "… Matematiğin biçimi, bilimin içeriği temsil ettiği söylenebilir. Başka bir deyişle, bilim olgusal ilişkileri ortaya çıkarmakta, matematik bu bulguları daha kesin ve açık dile getirmenin formül ya da kalıplarını sağlamaktadır. Kısacası, matematiği bu açıdan Galilei'nin dediği gibi, bilimin dili sayabiliriz." (Cemal Yıldırım, *Matematiksel Düşünme*, Remzi Kitabevi, s.16)

Matematik yaparken izlenen yol da genel olarak farklıdır. Mantıksal düşünme sonucu elde edilen tanım ve kavramlara bağlı olarak sonuca gidilir. Dolayısıyla kullanılan yöntem genellikle tümdengelimdir.

Bu iki bilgi türü arasındaki fark eğitim için önemlidir. Elbette analitik ve sentetik bilginin kullanım alanında iç içeliği vardır. Ancak analitik bilgi kanıta dayanır. Kanıtlamaya yeterince yer verilmeyen matematik iğretidir. Öğrencinin algısında hak ettiği değeri bulmaz. Çünkü tutarlılığı su götürür.

Matematiksel bilginin tutarlılığı

Kavramlara dayalı olan matematiğin diğer bilimlerin güvenilirlik kaynağı olduğunu söyledik. Bu durum matematik öğretimine özel bir görev yükler. Yani biliriz ki matematik öğretmek sadece matematik konularının kavranması ile sınırlı değildir. İşte bu yük matematiksel tutarlılığa bağlıdır. Elbette diğer disiplinler de bilimseldir ve tutarlıdır. Ancak matematiksel bilginin tutarlılığı farklı özellikte ve kesinliktedir. Bu tutarlılığı vurgulamakta yarar var.

Genel olarak fiziki evren, fiziki evrenin nesneleri, olayları olgusal bilimlerin laboratuarıdır. Fizik, kimya, biyoloji, sosyal bilimler gibi disiplinler fiziki dünya ile doğrudan ilişki içindedir. O dünyadaki değişime bağlı olarak onlar da yenilenir, değişir. Bu anlamda olgusal bilimler diye adlandırdığımız bu alanlara ilişkin bilginin tutarlılığı o dünyanın değişimine bağlıdır. Yani dış koşullara bağlı tutarlılık. Bir anlamda görece… Matematiksel bilgi ise dış dünyadan esinlense de ondan bağımsızdır. Kendi yapısı içinde üretilen bilgidir. Kendi kurallarına bağlı üretildiği için analitiktir ve tutarlılığı iç tutarlılıktır. Bu nedenle de matematiksel bilginin tutarlılığı daha katıdır, daha kesindir. Kesinliği ortadan kaldıracak tek şey, yeni matematik yapının (ya da sistem) oluşmasıdır. Örneğin insanoğlu farklı bir gezegene taşınsa, olgusal bilgi o gezegenin koşullarına göre yeniden biçimlenirken, matematiksel bilgi tutarlılığını koruyacaktır. Çünkü esas yönüyle insanın üretimidir.

İnsan aklının oluşturduğu matematiksel sistem temel kav-

ramlara ve aksiyomlara dayanır. Örneğin geometrinin aksiyomatik yapıya kavuşması Öklid'le gerçekleşmiştir ve hâlâ yaygın olarak kullanılır. MÖ 300 yılında Öklid ünlü yapıtı *Elementler*'de "aksiyom" olarak adlandırılan genel doğruları şöyle sıralar:

1. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine eşittir.
2. Eşit olan şeylere eşit şeyler eklendiğinde sonuçlar eşit olur.
3. Eşit olan şeylerden eşit şeyler çıkarıldığında kalanlar eşit olur.
4. Birbiriyle çakışan şeyler birbirine eşittir.
5. Bütün parçasından büyüktür.

Postulat olarak adlandırılan geometriye ilişkin genel doğrular:

1. Bir doğru herhangi bir noktadan başka bir noktaya çizilebilir.
2. Bir doğru parçası doğrusal bir çizgi üzerinde sürekli uzatılabilir.
3. Bir daireyi herhangi bir merkez ve uzaklıkla belirleyebiliriz.
4. Tüm dik açılar birbirine eşittir.
5. İki doğru üzerine düşen bir doğru çizgi, aynı yandaki iç açıları birlikte iki dik açıdan az yapıyorsa, iki doğru çizgi, iç açıların bulunduğu yanda yeterince uzatıldığında birleşir.

Aksiyom ve postulatlar dışında Öklid *Elementler*'de temel tanım ve terimlere yer vermiştir. Ki bunların bir kısmı tanımsız kavramlardır. Tanımsız olmalarının nedeni ise en temel kavramlar olmalarıdır. Sonuç olarak mükemmel denilebilecek bir tutarlılığa sahip matematik bilgiye ulaşmak;

a) Kavramları ve kavramların (terim, tanımsız terim, aksiyom, postulat, varsayım, teorem, ispat…) anlamlarını,

b) Çıkarımda bulunmayı (teorem kanıtlamak) bilmekten geçer.

ESTETİK MATEMATİK

Yukarıda yararlı matematik başlığı altında bilim ve matematik ilişkisini, bir anlamda "bilim için matematiği" inceledik. Matematik bilim için araç konumundayken kaçınılmaz olarak daha

katı görünümlü bir yapı ortaya çıkıyor. Her ne kadar uygulamada bazı güzelliklerden söz etsek de öğrenen açısından katı bir matematik uygulaması içindeyiz. Oysa matematiğin içeriği bu katılıkla sınırlı değil. Matematiğin gizemli estetiğini uygulamalardan yola çıkarak aralamak, matematiğe karşı vefa duygusu olsa gerek. Öğrenene de bu estetik yapıyı yansıtmak koşuluyla…

Şiir gibi

Yıllar önce bir sınıfta matematik dersi işliyorum. İşlenen konu benim aktif olmamı gerektiriyor. En azından konunun içeriğini, ilişkilerini, gereğini kavratmam yönüyle. Her zaman olduğu gibi, ön konularla ilgili anımsatmalar, kavrayış için gerekli sezgiyi güçlendirme, merakı kışkırtma çalışmaları ile giriş yaptım. Bu ön çalışmaların ardından seri bir biçimde sezgiler gerçekliğe, merak duygusunun doyumu hoşluğa doğru yönelmeye başladı. İlgi yüksek. Öğrenciler pür dikkat ve sıkıntısız dinliyor, soruyor, not alıyor. Bir kız öğrencim yanında oturan arkadaşına "ders şiir gibi gidiyor yav" yorumunu yaptı. Duydum. Mutlu oldum elbette. İşler iyi gidiyordu. Aldığım onayla vermek istediğimi vermenin huzuruyla dersi bitirdim. Zil de çalmıştı. Çıktım. Çıkarken de bir başka öğrencinin "ders nasıl bitti anlamadım" yorumuyla karşılaştım. Ders başarılıydı.

"Şiir gibi" yorumunu sonradan düşündüm. Anlattığım konuda Escher'in tablolarını, altın oranı ya da Fibonacci sayılarını çağrıştıracak şeyler yoktu. Ama ders şiir gibiydi! Escher'den, Fibonacci'den özellikle söz ediyorum. Çünkü matematik ve sanat deyince akla gelen örnekler bunlar. Belki bir iki şey daha. Geometrik şekillerin ne kadar estetik olduğu, müzik aletlerinin ses titreşiminin oransal ilişkileri gibi bilinen örnekler…

Neydi "şiir gibi"nin sırrı?

Birincisi hazırlıklarım yeterliydi. Konuyu, işleniş süresini, yöntemimi, konunun ön girdilerini iyi planlamıştım. Planlama ilkem: Anlatacaklarımın anlaşılır olması ve öğrencilerin ilgisinin canlı tutulmasıydı. İkincisi sınıfa girdiğim andan itibaren öğrencilerin düşüncelerini özgürce söyleyebileceği ortamı yaratmıştım. Ki bu her ders için gerekliydi. Üçüncüsü o anlatım o sınıfa

özgüydü. Aynı konu yan sınıfta hatta ertesi gün aynı sınıfta aynı şekilde anlatılamazdı. Bir ırmakta iki kez yıkanılamayacağı gibi. Dördüncüsü kazanımlar öncesi ön çalışma tartışmalı sorularla yürütülmüştü. Yani sezgileri güçlendirmek ve merakı kışkırtmak da tamamdı. Beşincisi belli kıvama gelen ders ortamında kazanımlar akıcı bir anlatımla verilmişti. Altıncısı kısa soru-cevapla kazanımların gerçekleştiği ölçülmüştü. Yedincisi ve de en önemlisi ben konuyu "heyecan" duyarak işlemiştim.

Neden bu etkinliği ayrıntılı bir biçimde aktardım. Elbette "ne kadar iyi yapıyorum" demek için değil. Bu benim işim. İyi yapmalıyım. Öğrenciye, matematiğe ve yaptığı işe saygı duyan her öğretmen aynı şeyleri yapar. Amacım birçok insanın "ben de yaparım" dediği öğretmenliğin "bildiğini aktarmakla" sınırlı olmadığını vurgulamak. Ama asıl vurgulamak istediğim bu da değil! "Şiir gibi" tepkisinin tek başına ses tonuna, dil kullanımına, anlatım akıcılığına bağlı olmadığı… Biraz daha ayrıntılı bakalım: Birincisi hemen her konu keşfedilmeyi bekleyen gizeme, her zaman şaşırtabilecek ilginçliğe ve güzelliğe sahiptir. İkincisi bu keşif eyleminde ortak üretimin dayanışması, işbirliği ve ortak aklın tekliği vardır. Üçüncüsü anlama eyleminin hazzı-estetiği vardır. Bu haz, duyguları okşayan güzelliğe büründüğünde, öğrenciler zamanlarının boşa gitmediği duygusunu yaşar, bilginin kalıcılığı umudu artar.

Yani tek başına bir matematik dersi bile içinde matematiğin katılığı (!) dışında birçok duygusal öğeler taşımaktadır. Gizem, ilginçlik, güzellik, teklik, haz, estetik, kalıcılık gibi… Bu öğeler daha çok sanat ya da felsefede adı anılan kavramlardır. Bir matematik dersinde de yoğun yaşanan bu duyuşsal kavramlarla, matematiğin özü tartışıldığında daha yoğun karşılaşacağız. Bu nedenle matematiğin estetik yanını sindirmek, bilmek ve öğrenciye yansıtmak kaçınılmaz olsa gerek…

Ancak o zaman matematik öğretimi "ne işe yarar" direncinden kurtulur, "keşfetmenin hazzı"na dönüşebilir. Aradığımız da bu değil mi? Anlamlı ve öğrenilen matematik! Hele de okullarda yaptığımız işe tek başına "öğretim" değil, "eğitim-öğretim" diyorsak, matematiğin estetik özelliklerini nasıl yok sayarız? He-

yecanın olduğu yerde estetik vardır. Uygulamaya baktığımızda, matematik öğretirken matematiğin estetik özelliklerini kullanıyor muyuz sorusuna verilecek yanıt ne yazık ki "evet" olmayacaktır. En azından bana göre öyle. Okullarda işlenen matematik "konunun öğretilmesi" ile sınırlı ele alınmaktadır. Karşılığında da haklı olarak öğrenci "ne işime yarayacak" tepkisi ile karşımıza çıkmaktadır.

Kaldı ki sorun sadece ülkemize has bir sorun da değil. *Matematik Sanatı* kitabında Jerry P. King bunu şöyle ifade ediyor:

> Hepimiz, az da olsa okul matematiğinin sıkıntısını çekmişizdir. Buna matematiği öğrenmeye değer bulduğumuz için, ya da Darwin'in yaratıkları gibi ortam elverişli olduğu için dayanmadık. Dayandık, çünkü seçme hakkımız yoktu. Uzun bir zaman önce birileri matematik bilmenin yararlı olduğuna ve eğer seçim bize bırakılırsa onu öğrenmek istemeyeceğimize karar vermişti. Bu yüzden, bizler de bir ortaokul sınıfında, karatahta karşısındaki sert sıralara oturmaya zorlanmıştık. Bu durumun eşyanın doğası gereği olduğuna, matematiğin ufak bir azınlık dışında kalan insanların sonsuza dek erişimleri dışında kalacağına inanmayı kabul etmiyorum. Halkın büyük bir bölümünün müziği, resmi, edebiyatı anlama ve haz duyma yetisine sahip olduğu; ancak doğuştan matematik özürlü olduğu düşüncesi bana kendini beğenmişlik, özür dileyicilik içeriyormuş ve düpedüz yanlışmış gibi geliyor. Açıkça görülüyor ki, matematiği bilimsel bir araç olduğunu vurgulayarak takdim etmenin en iyi yol olduğu düşüncesine dayalı olan günümüz matematik eğitim sistemi ile bu insanlara ulaşmayı başaramadık… Daha başlangıçta, öğrencilerimizi matematiğin, Poincare'nin 'bizde bir tür estetik duygu geliştirmeye muktedir olan bu güzellik ve zarafet niteliği' sözlerinde belirtilen özellikleriyle tanıştırmayı deneyebiliriz. (Jerry P. King, *Matematik Sanatı*, Çev: Nermin Arık, TÜBİTAK Yayınları, 6. Baskı, s.15)

Bu saptamalar ülkemiz matematikçilerine de yabancı değil. Yukarıda değindiğimiz saptamalarla da uyum içinde. Yazar matematiğin zarafet ve güzellik özelliklerinin ihmal edildiğini düşünüyor. Kitabın başka bir bölümünde;

> … yeni öğretim Poincare ve Papert doğrultusunda, önemli bir "estetik matematik"bölümü içermelidir. Gidiş o yönde değildir. Matematik eğitiminin geleceği bilgisayarlar, el hesap makineleri ve video gösterimleri şeklinde, teknolojiye gittikçe artan bir bağımlılığa yönelmektedir. Amerikalı öğrencilerin azalan matematik yetenekleri ile teknolojinin okullara sokulması arasındaki açık bağıntıyı gören tek kişi her halde ben değilim… (Age. s. 153-154)

Bu bizim üzerinde durduğumuz ve hatta matematik öğretimini daha da sorunlu hale getireceğini düşündüğümüz bir saptama. Çünkü yeni matematik programları ve yöntemleri hazırlanırken ülkemizde de "matematik öğrenme" teknolojiye pas edilmiş durumda. Somuta indirgemeyi ve kavramayı teknolojiye kurban ederek… Matematik öğretiminde teknolojinin kullanımı tartışmasını sonraya bırakalım. Estetik, sanat ve matematik ilişkisini temellendirmeye çalışalım.

Estetik

Cengiz Gündoğdu, İnsancıl Yayınları'ndan çıkan *Estetik Kalkışma* adlı kitabında, estetik kalkışma nedir sorusunu şöyle yanıtlıyor:

> İnsan soyunun dört alanda büyük kalkışması vardır. Taş yontması, Pratik Kalkışması'dır. Attığı taşın nasıl olup da düştüğünü bulması Bilimsel Kalkışması'dır. Yonttuğu taşın sapına gül yapması Estetik Kalkışması'dır. Yaşamın anlamını araması Felsefi Kalkışması'dır.
>
> İnsanın kalkışması gelişigüzellikten kurtulması, doğal varlıktan kültürel varlığa dönüşmesidir. Bu dönüşümün güzellik yasalarına uygun olmasına estetik denir. Estetikten yoksun bir dönüşüm, dönüşüm değil başkalaşımdır…
>
> Estetik yalnızca sanatla ilgili değildir. Estetik, yaşamın bütün alanlarını kapsar… (Cengiz Gündoğdu, *Estetik Kalkışma*, İnsancıl Yayınları, s.7)

Gündoğdu bu dört kalkışmayı sanırım bir sıra gözeterek vermemiş. Belki insan taş yontmaya başlamadan da gül resmi yapıyordu. Hatta ilkel anlamda matematik bile… Bu nedenle estetiğin ve matematiğin gelişmesinde koşutluklar düşünülebilir.

Matematiksel gelişimin seyrini Cengiz Gündoğdu'nun bilimsel ve felsefi kalkışması ile birlikte ele almak sanırım en doğrusu olacak. Yazar alıntının devamında estetik gelişmenin güzeli araması ve bulmasını ve bunun da küçük yaşlarda başladığını eklemiş. Bu beni de güzelliklerin ve niceliksel düşünmenin küçük yaşlarda geliştiği yaşanmışlıklara götürdü. İki yaşanmışlık…

Küçük oğlum anaokuluna gidecek yaşlarda. Ailece gezideyiz. Yolun sağ tarafında içerlikli bir pınar gördük. Çevresinde birkaç ağaç. Durduk soluk almak için. Elimizi yüzümüzü yıkadık. Pınarın suyu ile serinledik. Yaz sıcağına direnç. Laflıyoruz çevreyi gözleyip. Oğlum biraz hiddetli, "susun bi dakka" dedi. Döndük baktık yüzüne. Açıklama bekliyoruz… Hemşire 'sus'u yapar gibi parmağı dudağında sessizce, "susun, sessizliğin sesini dinliyorum". Sanki trans halinde. Sustuk, dinledik. Kendi adıma ben, yanımda akan pınarın şırıltısını, esen rüzgârla oluşan ağaçların hışırtısını ve yolun diğer yanında akan ırmağın çağıltısını duydum. Sessizliğin sesi bu muydu bilmem. Ama küçük adam duyduğundan emindi…

Aynı yıllar, yine aynı küçük adam. Okula gitmiyor ama saymayı seviyor, biliyor. Her çocuk gibi de algılamaya çalışıyor. Eve geldiğim bir gün kucaklaştık. Konuşurken "sen benim bir tanemsin" dediğimi sonradan anımsadım. Döndü bana önce bir parmağını uzatıp "baba bir mi çok", sonra beş parmağını uzattı "beş mi çok?" Yanıt verdim; "elbette beş çok" yanıtı biliyorsun der gibi… Arkasından yeni bir soru geldi bana; "öyleyse beni severken neden beş tanemsin demiyorsun?" Ne yanıt verdiğimi anımsamıyorum. Önemli de değil. O anda benim çıkardığım sonuç önemliydi. Onun düşüncesinde, az ile çok kavramları ile bir ve beşin niceliksel değerleri arasındaki ilişki kurulmuştu. Kurulamayan, "bir tanem" deyişinin "biricikliği" idi. Cengiz Gündoğdu'nun dediği gibi, gerçek yaşamın bir ağacı, bir adamı, bir evi matematik dünyasında "1" sayısına, güzellik yasalarına uygun olarak da estetik bir değere "biricik" olmaya dönüşmüştü.

Sessizliğin sesindeki ses ahengini bulmak küçük adam için sanatsal algıydı. İkinci anlatıdaki "bir"in niceliksel algılanmasında sorun yoktu. O da tüm çocuklar gibi "bir"in, "iki"nin, "üç"ün

gizemini sezmişti. Anlamaya çalışıyor, anladıkça anlamanın coşkusunu yaşıyordu. Ama "biricik"liğe dönüşen "bir"deki farklılaşmayı henüz algılayamamıştı. "Bir tanem" deyişindeki sevgiyi, güzelliği sezdiği halde. Ona göre yaşamdaki tek nesnelerin niceliksel ifadesi olan "bir" sayısı düşsel bir nesnesiydi. Ve bir başkalaşımdı. "Biricik"e geçmek ise ikinci bir başkalaşım. Hem de güzellemeye evrilen bir başkalaşım. Sanırım biraz çok gelmişti ona.

MATEMATİK VE SANAT

İnsan etkinlikleri içinde en çok tartışılan, üzerinde en çok yazı yazılan sanattır. Romanı, şiiri, müziği, resmi heykeli… ile. Çünkü sanat neredeyse tüm insanların kıyısından köşesinden olsa bile dokundukları bir etkinlik alanı. Gerek uygulayıcı ve daha çok da izleyici olarak. Yemek yapan kadın mutfağında şarkı mırıldanır. Sesi güzel olmasa da. Her evin duvarında bir resim, bir halı dokuma ya da kilim deseni mutlaka vardır. Beğenilere göre değişse de. Mahkûm, koğuşunda cüzdan üzerine boncuk işler. Af umudu olmasa da. Her berber dükkânının duvarını bir resim süsler. Birileri bunlara "bu da resim mi" dese de… Belki öyledir de. Ama kimse bana Ardeşen'in Tunca'sında, dağdan fışkıran suyun ağzına yapılan iki oluklu pınara sanat değildir demesin. Kimin yaptığı belli değil. Ama yapan aynı gövdeden çıkan bir çatal dal bulmuş, çatal dalı çakı ya da bıçakla özene bezene oymuş ve suyun çıktığı ağza yerleştirmiş. Hiçbir gereksinime dayanmayan, tamamen yaratıcılık eseri, ince ve hatta esprili bir eser… Gördüğünüzde önce şaşırıyorsunuz sonra içinizi bir hoşluk kaplıyor. O olukların her birinden akan su "iç beni" der gibi davetkâr… Beğenilsin ya da beğenilmesin. Bunların her biri insanın duygu dünyasındaki güzellik arayışlarının birer ürünü. Bunların her birinde seçicilik de bulursunuz, yaratıcılık da estetik de. En yoksul bile evini düzenlerken bir estetik yaratmak istemez mi? Nakışlı tek örtünün yeri evin başköşesi değil midir? Ya da tek köşesi! Ve de öyledir ki insanın güzellik arayışı, beşikteki işlemeyle başlar, mezar taşı işlemesine dek sürer. Yani sonuçta kesiksiz bir iç içelik vardır insanla sanat arasında. İşte

belki de bu iç içelik nedeniyle sanat deyince bunlar gelmez akla. Daha seçkinci, daha yaygın kabul görmüş eserlerdedir gözümüz. Falan ressamın resmi, falan yontucunun heykeli, filan bestecinin müziği, şu mimarın eseri… gibi. Daha akademik bir tavırdır bu. Daha evrensel de denilebilir.

Nedir o zaman sanat? Nelere sanat eseri diyeceğiz? Oldukça tartışmalı… Bu tartışmalar kitabın içeriğiyle ilgili değil. Ayrıca ben bu tartışmaya katılacak yetkinlikte de değilim. Üzerinde durduğumuz, sanat konusunda birleşilen genel kabuller ve bunların matematikle bağdaşıklığı. Sanatla ilgili özellikler deyince şunlar sıralanır: Soyutlama, seçicilik, yaratıcılık, teklik-biriciklik, kalıcılık, estetik, çoğulculuk. Yerine göre bunlara başka özellikler eklenir ya da çıkarılır. Bu özelliklerin çoğunlukla birbirini tamamladığı da söylenebilir. Örneğin sanat eserinin yaratılması bireyin seçiciliğine, yeteneğine bağlıyken, kalıcı olması çoğunluğun onayına, beğenisine bağlıdır. Hani Aşık Veysel der ya! "Güzelliğin on para etmez, bu bendeki aşk olmasa."

İşte bu nedenle sanatçının eserini yaratırkenki seçiciliği ve yaratıcılığı ancak çoğunluğun beğenisini kazandıktan sonra biricikliğe ve kalıcılığa ulaşır. Yani "sanat" olur.

Sıraladığımız özelliklerin matematiğin özellikleriyle de büyük ölçüde uyum içinde olduğunu görmek matematikçiler için şaşırtıcı değildir. Ancak genel kanının bu yönde olmadığı da açıktır. Bu uyum matematikte gerçekten var mıdır? Bana göre vardır. Ama bu uyumu incelemeye başlamadan önce yapılan yaygın yanlışı yeniden anımsatalım. Bu yanlış; matematik ve sanat ilişkisi deyince birilerinin hemen Escher'in tablolarını, altın oranı, Fibonacci Sayılarını ya da doğadaki şekilleri kanıt olarak sunmasıdır. Escher matematiksel formları kullanarak eşsiz tablolar yapmıştır. Altın oran ya da Fibonacci sayıları doğada karşılık bulan önemli matematiksel kavramlardır. Estetik değerleri ve gizemleri şaşırtıcıdır. Değişik geometrik şekiller için de benzer şeyler söylenebilir. Ama bunları matematikte sanat olduğunun kanıtları biçiminde sunmaya itirazımız var. Bu sıralananlar ancak, yaşamın her alanında olan matemati-

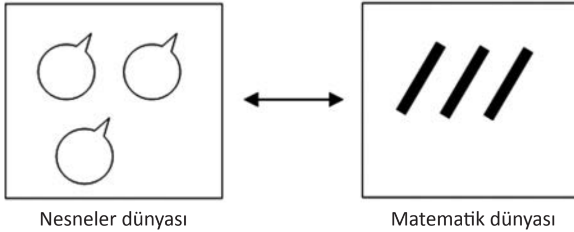
ğin sanatta da gözlemlendiğinin örnekleri olabilir. Benzer şekilde keman tellerinin çıkardığı eşsiz güzellikteki sesleri tellerin oranı ile açıklayıp "işte matematik işte sanat" demek de açıklayıcı değil. Eğer matematikte sanat tartışılacaksa ya da matematik ile sanat arasında bir koşutluk aranacaksa, bunu matematik ve sanatın davranışlarında ve işleyişlerinde aramak gerekir. Soyutlama, seçicilik, gizem, ilginçlik-ayrıcalık, güzellik, estetik, kalıcılık gibi sanat özelliklerinin matematikte ne kadar var olduğunu gözden geçirelim. Gelişim süreçlerini de karşılaştırarak…

Gelişim süreçleri paraleldir. Matematiğin ve sanatın tarihi insanlık tarihi kadar eskidir. Çünkü her ikisi de insanlaşma sürecinin yapı taşlarıdır. Mağara resimleri - taş yontuları sanatın, duvar çizikleri - geometrik figürler matematiğin tarihsel önceliklerinin kanıtlarıdır. En ilkel dönemlerde çizgiler biçimindeki çocuksu resimler perspektif gelişimi ile nasıl üç boyutlu resimlere evrildiyse, çentik biçimindeki ilk sayma çabaları da sonsuzu araştırmamıza yarayan modern sayılara kadar gelişti. Ayrıntılı incelendiğinde her iki seyrin şaşırtıcı benzerlikleri görülebilir.

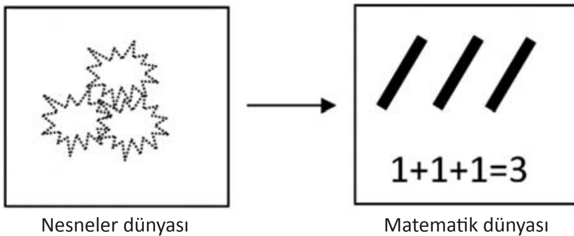
Beslenme kaynakları gerçek dünyadır. Matematiğin de sanatın da beslenme kaynakları gerçek dünyadır. Bir başka deyişle gerçek dünyanın nesneleri ve nesneler arasındaki ilişki hem matematiğin hem sanatın itici gücüdür. Sanatçı gerçek dünyadaki bir taşı alır, kendi dünyasına taşır, yontar, insanı taşa işler. Ve de onu heykel olarak gerçek dünyaya geri gönderir. Gerçek dünyada o taş yoktur artık. Taşa işlenen insan da bir gün yok olur. Ama heykel gerçek dünyada yaşamaya devam eder. Nesnelerin nicelikleriyle ilgilenen matematikçi de sanatçı gibi gerçek dünyanın nesnelerine gözünü diker. Örneğin birebir karşılaştırılabilen nesneleri alır kendi dünyasına. Yeni bir biçim verir ve adını koyar. "Üç" der örneğin. Gerçek dünyada olmayan, insan aklının geliştirdiği bir formdur üç. Ya da hareketli bir nesnenin hareketini ele alır matematik. Onlardan modeller üretir. Fonksiyon der adına, türev der, vektör der. Kendi nesnelerini üretir. Gerçek dünyada olmayan nesneler…

Sanat ve matematik koşutluğunun belki de farkı budur. Heykel bir nedenle yok olabilir. O zaman öyle bir sanat eseri yoktur artık. Ama matematiğin üretimleri yaşam var oldukça varlığını sürdürmeye devam eder.

Soyutlama disiplinleridir. Nesneler dünyasında üç tane olma ilişkisi birebir karşılaştırma sonucudur. Üç sandalye - üç insan, üç kedi - üç fare, üç ev - üç ağaç - üç… gibi. Nesneler dünyasında sandalye var, insan, ağaç, kedi… var. Ama "üç" yok. Üç artık "3" olarak matematik dünyasında var. O dünyada ise sandalye yok, ağaç yok, insan yok… Nesneler dünyasında üç tane olma ilişkisi başlangıçta matematik dünyası ile de birebir ilişki içindedir.



"n" yıl sonra matematik dünyası gelişir. Matematik dünyasının nesneleri gerçek dünyadan bağımsız olarak var olur. Nesneler dünyası artık daha belirsiz, matematik dünyası daha nettir.



Artık matematik nesneleri gerçek dünyadan tamamen soyutlanmıştır. Aynı soyutlamayı sanat dünyası, gerçek dünya ilişkisin-

de de görmekteyiz. Bu ilişki benzerliği sözünü ettiğimiz üç dünya arasında aşağıdaki gibi kurulabilir. Kuş - güzel kuş - bir...



Nesneler dünyası Sanat dünyası Matematik dünyası

Yine bir "n" yıl sonra, nesneler dünyasındaki kuş her nesneye dönüşürken, sanat dünyasında estetik forma, matematik dünyasında ise "1" sayısına dönüşür. Bu soyutlamanın gelişme seyridir.



Ve de bir "n" yıl sonra ise nesneler dünyasından bağımsız olarak sanat dünyasının "en güzel kuş"u "en güzel"e, matematik dünyasının bir elması salt "1"e dönüşür.



Nesneler dünyası Sanat dünyası Matematik dünyası

Sanat da matematik de seçicidir. Dünyada birçok aşk yaşanır. Çoğunlukla da birbirine benzer aşklar. Sanatçı aşkı yazar. Yazdığı birbirine benzeyenler değildir ama... İlginç olandır, seçilmiş olandır. Paul ve Virginie'in aşkıdır yazdığı ya da Leyla ile Mecnun'un aşkı. Bülbülün sesi bestelere konudur. Karganın de-

ğil… Beste yapan o sesi seçer. Çünkü farklıdır, ilginçtir. Elbette bu saptamalar da tartışmalıdır. Döneme bağlı olarak beğenilerde farklılıklar olabilir. Kişilere ve toplumlara bağlı olarak da. Seçilenin farklılığı ve ilginçliğini tarihsel süreç ve kalıcılığı ile birlikte düşünmek gerek. Bir de evrenselliğiyle…

Matematik de kendi yapısı içinde ilginç olanı seçer. Matematik için cismin düşmesi değil, nasıl düştüğü ilginçtir. Düşerken hangi yolu izlediği, hangi şiddetle düştüğü ilginçtir. Onu inceler. Dünyanın küresel oluşu matematik için değil fizik için ilginçtir. Küreye benzer birçok cisim vardır ve bunlar diğerlerinden farklıdır. Matematik için ilginç olan küreye bezer cisimlerin niceliksel özellikleridir. Bu nedenle matematik kürenin yarıçapı, hacmi, alanı, kesitleri ile ilgilenir. Dünyanın hacmini veya alanını hesaplamak matematik için olsa olsa matematik öğrenmeyi "ilginç" hale getirme sorunudur.

Yaratıcılık üretim biçimleridir. Sanatçı gerçek yaşamdan nesneleri seçerken seçicidir. Ama seçtiğinin seçkinliği ile yetinmez. Ona kendi duygularını katar. Seçkini daha seçkin hale getirir. Paul ve Virginie'in aşkı seçkindir. Yazarın algısı daha da seçkindir. Yazarken duygularını katar aşka. Öyle katar ki, o aşka Paul de şaşar, Virginie de. Gerçek dünyadakinden daha idealdir. Ve de yeni aşklara gebe. Ve onun için "sanat"tır.

Matematikçinin seçtiği kare herhangi bir dörtgene göre ilginçtir. Bir anlamda da seçkin. Karenin kapladığı yüzey de ilginçtir. Matematikçi, alan ölçümü için bir kurgu ortaya koyar. Onu benzer dörtgenler için de uygular. Ortaya attığı kurgu kareyi aşar, kurama dönüşür. O kurgu yeni bir kavramdır artık. Eşsiz, yüce ve derde deva… Çünkü "kuram" tüm dörtgenlere, tüm çokgenlere uygundur.

Yaratılanlar tektir, güzeldir, mükemmeldir. Sanat eserinin mükemmelliği onun "eşsiz" oluşundandır. Eşsiz ve bulunmaz olduğu için tektir. Kurtuluş Savaşı ile ilgili birçok şiir yazılmıştır. Ama Nazım Hikmet'in *Kurtuluş Savaşı Destanı* tektir, biriciktir. Yazılanların en coşkulusu, en güzeli, en mükemmelidir. Çünkü kamunun beğenisine sunulmuştur, onaylanmış, kalıcı hale gelmiştir. Heyecan vericidir.

Matematikte de aynı konu birçok matematikçi tarafından incelenir, kuramlar oluşturulur. Bunların içinde en mükemmeli kabul görür. Kabul gören kuram kurala veya teoreme dönüşür. Diğerleri elenir. Sanattan farklı olarak en basit, en sade, en anlaşılır ve en şaşırtıcı olandır seçilen. Matematiksel mükemmelliğin temel ölçütü genel olarak "tutarlılık" ve "yararlılık"tır. En tutarlı, en yararlı olan tektir, "eşsiz"dir. En güzel olan da odur. Teklik ve güzellik sanat ve matematik için ortak yandır. Ama sanatsal güzellik için mükemmellik yeterli iken, matematiksel güzellik için tutarlılık ve yararlılık aranır. Biraz daha dolaylı biraz daha karmaşık… Belki biraz daha özenli. Yararlılığı bir anlamda "ciddilik" olarak alan büyük matematikçi G.H. Hardy, *Bir Matematikçinin Savunması* adlı kitabında; "Nasıl ki şiirde bile güzellik, bir ölçüde, içerdiği fikrin önemli olmasına bağlıysa, bir matematik probleminin 'güzelliği' de büyük ölçüde, onun ciddi oluşuna bağlıdır… Güzellik ilk sınavdır. Çirkin matematik için dünyada yer yoktur" der. (G. H. Hardy, *Matematikçinin Savunması*, çev: Nermin Arık, TÜBİTAK Yayınları, s. 68)

Hardy'nin çirkin matematikten kastı yukarıda sözünü ettiğimiz elenen kuramlardır. Elbette yanlışlananlar da elenir. Matematiksel güzelliği problemin ciddiliğinde araması ise, yine sözünü ettiğimiz tutarlılık ve yararlılık ilkesine karşılık gelmektedir. Bunun en güzel örneklerinden biri Kümeler Kuramı'nın kurucusu olan Cantor'un (1845-1918) sonsuzlukla ilgili çalışmasıdır. "Bütün parçasından büyüktür" ilkesini yadsıyan bu çalışma, basitliğin, sadeliğin, anlaşılırlığın güzel bir örneğidir. Ancak kuramın kalıcılığı sanatta olduğu gibi sadece güzelliğine bağlı değildir. Kalıcılığın nedeni yararlılığı ve tutarlılığıdır. Cantor'un sonsuzlukla ilgili kuramı matematikte bir çığır açmış, analiz konularının gelişmesinin temel taşlarından biri olmuştur.

Evrensel etkinliklerdir. Gerek sanat gerekse matematik kitlelerin onayına açıktır. Kitlelerin beğenisini kazandığı ölçüde sanattır ya da matematiktir. O kitle tüm insanlıktır. Yerel motifler içerse de sanatın yurdu yoktur. Sanatçının da. Beethoven Çin'lidir, Arap'tır, Avrupa'lıdır… Matematik teoremlerinin ma-

tematikçilerin de yurdu yoktur. O da yeryüzünde yaşayan her insanın beğenisine, hizmetine açıktır. Yani evrenseldir. Belki de sanatın, matematiğin ve de bilimin evrenselliği olmasa "insanlaşma" süreci çok daha yavaş olacaktı. Fransızın sanatı Çinli için, Çinlinin teoremi Fransız için anlamlı olmayacaktı. Gerek sanat gerek matematik eserler üretildikleri çağa da ait değildir. Çağın ipuçlarını verse de sonsuzdan gelip sonsuza giden insanlığın ortak mallarıdır. Mağaradaki resim ya da çetele, kilisedeki ikon, cami avlusundaki tasvir, Pisagor teoremi… Bunlar günümüzde de hâlâ taptaze eserlerdir. İnsanlık var olduğu sürece de kalıcılıklarını sürdüreceklerdir.

Matematiğin evrenselliğinin sanatta pek olmayan üstünlüğü ise, onun örgüsünde, bütünselliğindedir. Her ne kadar Yunan matematiği, Hint matematiği, Avrupa ya da İslam matematiği denilse de biri diğerinin üstünde yükselmiştir. Birini aradan çektiğinizde, diğerleri boşlukta kalır.

Estetik eğitim araçlarıdır. Sanatın insanın, insanlaşma eğitiminin aracı olduğu bilinen gerçektir. Her ne kadar bir sarayın mimarisi muktedirin gücünü gösterse de, ya da zalimin gücünü simgeleyen resimler de olsa, yani her zaman "gül kokulu" olmasa da, sanat insanlaşma çabasının en güçlü aracıdır. İnsanda coşku, mutluluk, zarafet gibi estetik duygularını geliştirir.

Bu anlamda matematik de sanattan aşağı kalmaz. Matematik insanın yaşamı anlama-anlamlandırma yani insanlaşma çabasının en önemli araçlarındandır. Gökyüzündeki kuşun bir "an"daki kanat sesini duyarsın matematikle, dokunamadığın Merih'le birlikte dönersin uzayda, ışığın nasıl büküldüğünü gözlersin sonsuzlukta. Birçok matematik probleminin çözümünde ya da bir teoremin ispatında da yaşarsın sanattakine benzer hazzı, coşkuyu, güzelliği…

Yine bir farkla ki sanattan zevk almak çoğunlukla özel bir çaba gerektirmez. İzlemeyi, görmeyi, dinlemeyi bilmek yeter coşku duymak için. Matematik ise biraz çaba gerektirir. Matematiği anlama ve öğrenme çabası. Sunduğu eşsiz güzellikleri duyabilmeye değecek bir çaba. Bilenler için coşku duyulan, bilmeyenler için korkulan bir etkinliktir matematik…

Öyleyse yeni bir soru: Korkulan bir etkinlik olması yukarıdaki saptamalarla çelişmiyor mu? Matematik, sanatsal bir etkinlik ise neden korkulan bir etkinlik olsun? Siz bir öğrencinin, “resim ne işime yarayacak” veya “müzik ne işime yarayacak” dediğini duydunuz mu? İşte tartıştığımız fiili durum bu. Bir yanda yararlılık yanıyla sistemin öne çıkardığı bir anlamda “dayatılan” matematik. Diğer yanda estetik yanı ile güzellikleriyle “görmezlikten gelinen” matematik.

Yukarıda sıraladığımız bağdaşıklıklar arttırılabilir. Öte yandan itirazlar da olabilir. Çünkü her sanat eseri her insana aynı hazzı vermeyebilir. Anlık beğeniler farklı olabileceği gibi süreç içinde değişen algılar da “sanat eseri” algısında farklılaşmaya yol açabilir. O zaman şöyle bir sonuç çıkarmak sanırım doğru olacaktır: Bir esere dönemin koşullarını, anlayışını algılayarak bakmak gerek. Öyle ya… Üç boyutlu resme geçilmediği dönemlerde mağara duvarlarına çizilen çocukça resimlere ne demeliyiz? Yandan görünen bir resimde at üzerindeki adamın iki ayağının da görünmesine kibirle bakarsak, sanatın kalıcılığından söz edebilir miyiz? Matematikte de bugünkü gelişmişlik düzeyine göre geçmişte kullanılan birçok kabul ve yöntemin yetersiz hatta yanlış olduğunu biliyoruz. Örneğin Antik Yunan öncesi Mısır’da kenarları a,b,c,d ile gösterilen *ABCD* dörtgeninin alanı, $A(ABCD) = (a+c).(b+d)/4$ formülü ile hesaplanıyordu. Dikdörtgen dışında diğer dörtgenler için yanlış olan bu formül süreç içinde düzeldi. Ama o günün gelişmişlik düzeyine göre o formül önemliydi. Aksini düşünmek “eskiler ne aptalmış” aptallığına düşmek olur.

Matematik ve sanat ilişkisi ile ilgili birçok araştırma ve tartışma vardır. Hatta matematiği doğrudan sanatın bir dalı olarak tanımlayan matematikçiler, bilim felsefecileri de vardır. Bu tartışmalar önemli ve çok yararlı. Çünkü matematik için “sanattır” diyenlerin de “sanat değildir” diyenlerin de birleştiği nokta; “matematiğin sanatsal değerinin güçlü” olduğudur.

Üzerinde durmamız gereken asıl nokta ise; matematik öğretiminde matematiğin estetik yönünün nasıl yansıtılacağı… Elbette bu yukarıdaki maddeler sıralanarak yapılamaz. Bu hiç gerçek-

çi değil. Yapılmalı ama nasıl? Nasıl yapılmalının yanıtı sanırım kendi geçmişimizde… Kendi matematik öğrenme serüvenimizde. Sık sık kendi matematik serüvenimi düşünürüm ve heyecan duyarım. Bu serüven ilk problem çözme yıllarına dek uzanır.

Bir problem çözümü, hele hele uzun uğraşılardan, uzun işlemlerden sonra sonuca ulaşmak çocuk yaşta bende ciddi hazlar uyandırıyordu. Bir futbol maçında en kritik anda gol atmak gibi. Bin yıllık bir heykeli görüp bin yıl önce bu heykelin kanlı canlı bir adam olduğunu düşünmek gibi. Beğendiğim bir kızın gözlerinin benim üzerimde olduğunu bilmek gibi… Kaç değişik kanal, kaç değişik haz. Ama hepsi insani, hepsi heyecan dolu. Problem çözmenin ötesindeki matematiği öğrendikçe duyduğum haz arttı. Bazılarını zor öğrensem de… Havaya attığım topun düşerken çizdiği yolu kâğıda dökmek ilginçti. Attığımda hızlı yükseliyor, yükseldikçe yavaşlıyor, bir an duruyor sonra yükselirken yavaşlamasının tersine hızlanarak düşüyordu. Simetrik bir yol çizerek. Kaç kez istop oynamış ama matematiği öğrenene kadar bunu fark edememiştim. İşte o yolu çizdim. Önce ilginç geldi sonra güzel. Mimar gibi kroki, ressam gibi resim çiziyordum. Heyecanla… Üç bacaklı masa yere daha sağlam basarmış. Denedim ve baktım ki gerçekten öyle. Önce şaşırdım sonra heyecan duydum. Ben niye düşünememişim? Merih'in benden ne kadar uzakta olduğunu bulabilirmişim. Hem de Merih'e hiç dokunmadan… Sanki büyücü gibiyim. Dudaklarımda bir gülümseme, muzaffer. Ve de bir otomobilin bir andaki hızını da bulabilirmişim… Muhteşem… Otomobil şoförünün bundan haberi bile yok.

Bir sonraki aşama bunları öğretmen olarak öğretmek. Daha doğru deyişle paylaşmak. Önceki akranlarımla yani öğrencilerimle. Onların duyduğu "heyecanı", "gizemi parçalama" duygusunu, "başarmanın coşkusunu" yeniden yaşayarak. Taptaze kalan heyecanlar. Benden önce duyulan, benden sonra duyulacak coşkularla…

Sonra sorular sorular… Neden antik çağ öncesine dek gitmiş matematik yapma - matematik öğrenme tutkusu? Salt gereklilik salt yarar için olabilir mi? Öyle olsaydı hep sanatla birlik-

te öğrenilir miydi? Neden hep sanatla birlikte anılmış? Neden ilk saptanan öğretim programlarının dört disiplininden değişmez “bir”i olmuş? Neden suyun bileşenleri bilinmezden, gülün kokusu ayrıştırılamazdan öncesinde varmış? Hangi matematik, nasıl bir matematikmiş bu? Ne menem şeymiş matematiğin estetiği? Biraz yaşanmışlıklar, biraz örnek, biraz öneri…

‘ÖĞRENME’DE MATEMATİK ESTETİĞİ

Ulan Öklid

Teorem kanıtlamanın hazzını bir yaşanmışlıkla aktarayım. Matematik başarısının düşük olduğu bir sınıfta Metrik Bağıntıları işliyoruz. ABC dik üçgeninde BC hipotenüs, AH hipotenüse ait yükseklik olmak üzere; $|AH|^2 = |HB|.|HC|$ (Birinci Öklid) eşitliğini ispatlamalarını istedim. Oldukça zayıf olan ve sanırım bu sınıfa değin hiçbir teorem ispatlamamış bir öğrencim biraz ürkek, “hocam ben bir şeyler yaptım ama… bakar mısınız” dedi. Gittim. Kullandığı bağıntılar ve gösterdiği benzerlik sonucu doğruydu. Teoremi kanıtlamıştı. “Güzel, sonucu bulmuşsun” diyerek kutladım. Şaşırdı. Gözü defterinde coşkuyla, “ulan Öklid, sen olmasan bu benim teoremim olacaktı” türü bir tepki verdi. O coşkuyla her rastladığı teoremi kanıtlama çabasına girdi. Güveni artmıştı.

Bir kanıt

$\sqrt{2}$’nin irrasyonel olduğunun ispatı matematikçilerce bilinir. Bu ispatın güzelliği de… Teorem ispatına geçmeden, *a* ve *b* birer tamsayı, $b \neq 0$ olmak üzere “*a/b*” biçiminde yazılan sayılara rasyonel sayı, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ gibi sayılara ise irrasyonel sayı denildiğini anımsatalım. “Soru”nun nasıl “sorun” haline geldiğini de...

Öteden beri $x^2 = 4$ denkleminin çözümünün +2 veya –2 olduğu kolaylıkla söylenebiliyordu. Hatta $x^2 = 4/9$ denklemi de $x = \pm 2/3$ olarak çözülüyordu. Ama iş $x^2 = 2$ denkleminin çözümüne gelince sorun başlıyordu. Çünkü karesi 2 olan sayı vardı ama rasyonel sayı kümesinde yoktu. Hatta 2 neyin karesidir sorusunun, sayılara tanrısal bir güç atfeden Pisagor Okulu’nda cinayete yol açtığı bile söylenir… Sonuçta $\sqrt{2}$’nin bilinen rasyo-

nel sayı kümesinde tanımlı olmadığı düşünülüyor. Ama matematikte "olmadığını düşünmek" yetmediği için kanıtlama çabası başlıyor…

Teorem: $\sqrt{2}$ irrasyonel sayıdır.

Kanıt: $\sqrt{2}$'nin *a* ile *b* aralarında asal (ortak böleni olmayan) ve "*a/b*" gibi bir rasyonel sayı olduğunu varsayalım.

$\sqrt{2} = a/b$ ve $a = \sqrt{2}.b$ olur. Her iki yanın karesi alındığında; $a^2 = 2b^2$ olur ki, $2b^2$ çift sayı olduğundan onun eşiti olan a^2 de çift sayıdır.

Karesi çift sayı olan sayı da çift sayı olacağı için "*a*" çift sayıdır. Ve $a = 2c$ biçiminde yazılabilir. Bu kez;

$a^2 = 2b^2$'de "*a*" yerine "2*c*" yazılırsa; $4c^2 =2b^2$ den $b^2 = 2c^2$ olur ki, yukarıdaki gerekçe nedeniyle b^2 ve bağlı olarak da "*b*" çift sayı olmak zorundadır.

$\sqrt{2} = a/b$ varsayımında "*a*" ve "*b*" çift sayı ise ortak bölenleri vardır ki, *a* ile *b* aralarında asal olamaz. Aralarında asaldır varsayımıyla çelişir. Öyle ise $\sqrt{2}$ rasyonel değil, irrasyonel sayıdır yargısına varırız.

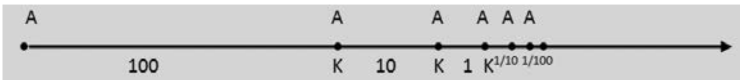
Bu kanıttan alacağımız haz bir müzik parçasını dinlediğimizde alınacak hazla aynı değildir. Müziği dinler, dinlediğiniz anda duygusal hazlar yaşarız. Ancak $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunun ispatı anlık hazlar yaratmayabilir. $\sqrt{2}$'nin yıllarca gizemini koruduğu, insanların akıllarını işgal ettiği ve hatta Pisagor Okulu'nda uğruna cinayet işlendiği bir sürecin sonucu olduğuyla birlikte düşünülmelidir. Ardından da insanları uzun süre düşündürmüş olan sorunun birkaç akıl ve kalem darbesiyle çözülebildiğini görmek gerek. İşte sorun burada. Yukarıdaki kanıt kadar önemli olan bir yan ise Pisagor Okulundaki yaşanmışlık söylencesi. Bunları bilmek öğrencilerin hakkı. İçine duyguyu, coşkuyu katmadığınız hiçbir bilgi kalıcı olmaz. Üstüne üstlük matematik bu duygu kışkırtmalarına çok müsait bir disiplin. Bunu bilmek ve yerine getirmek... Tek sorun bu.

Bir paradoksun yaptıkları

Paradokslar genellikle bir şeyin, gerçek dünyadaki davranışı ile matematik dünyasındaki davranışı arasındaki çelişkiler biçiminde tanımlanır. İlginç olduğu kadar da şaşırtıcıdır. Bu İlginçlik gazetecinin köpeği ısırması gibi bir ilginçlik değil, suyun içinde ateş yanması gibi olanaksız bir ilginçliktir. Karşımıza çıkıverdiği için değil, düşündükçe şaşkınlığımız artar. "Yahu düşündükçe kafayı yiyeceğim" denilen türden bir şaşkınlık. Anlık beklenmediklere değil derinlikli çelişkilere bağlı… Herkesin değil birilerinin bulduğu çelişkiler. Birilerinin bulduğu ama herkesin uğraşmaktan kendini alamadığı… Sabır isteyen, derinlikli düşünüş isteyen ve eğlenceli… Sonsuzluğu anlamaya çalışmak bunlardan biridir. Gerçek dünyada olduğu kadar matematik dünyasında da… Aşil Paradoksu en yaygın bilinenlerdendir.

Soru: Aşil ile kaplumbağa yarışacaklar. Aşil kaplumbağanın on katı kadar hızlı koşuyor. Biraz adalet için kaplumbağa yarışa 100 metre önden başlıyor. Aşil kaplumbağaya kaçıncı metrede yetişir?

Çözüm: Görünüşte zor soru değil. Ama hız yok, zaman yok. Arada 100 metrelik fark var. Bu fark adım adım kapanacak. Nasıl ve kaç metrede. Sanırım şekil üzerinde düşünmek en iyisi…



Aradaki fark yarış başladığında 100 metre. Aşil 100 metre koşup kaplumbağanın olduğu yere geldiğinde kaplumbağa 10 metre yol alır. Yani kaplumbağa 10 metre ilerde. Aşil 10 metre yol aldığında kaplumbağa 1 metre yol alır. Bu kez fark yine var ve kaplumbağa 1 metre önde… Sonra fark giderek azalır; 1/10 metre, 1/100 metre, 1/1000 metre… Ama kaplumbağa hep önde.

Soru kaç metre sonra yetişir idi. Ama bakıyoruz fark azalıyor ama hiç bitmiyor. Bitecek gibi de değil. Soru bir başka biçime dönüştü: "Aşil kaplumbağaya yetişir mi?"

Aradaki farkı bir kez daha gözden geçirelim:

100, 10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000, ….

Görünen o ki arada hep bir fark olacak ve Aşil kaplumbağaya asla yetişemeyecek.

İşte itiraz: "Ne demek, geçer bile!" Oysa kâğıt üzerine yaptığımız tartışma bize geçmek bir yana yetişemeyeceğini gösterdi. İşte paradoks dediğimiz tam da bu. Kâğıt üzerindeki mantıklı tartışma gerçek hayatla çelişti. "Geçer bile" tepkisi, gerçek hayatın yazılı çizili olana tepkisi.

Bu tepki bizi; "$\frac{1}{\infty} = 0$" sonucuna götürür. Bunu matematiksel olarak "$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$" biçiminde yazarız. Kâğıt üzerinde yaptığımız işlemde payda giderek büyümektedir. Bu değerin sonsuza değin büyüyeceğini öngörebiliriz. Yani yukarıdaki dizi;
100, 10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000,…., 1/∞ biçimine dönüşecektir. Diğer yandan gerçek hayat bize, Aşil'in kaplumbağaya yetişeceğini göstermektedir. Yetişme anında aradaki farkın "0" olacağını biliyoruz. Öyle ise rahatlıkla "**1/∞ → 0**" sonucuna ulaşırız. Artık 1 yerine 2, 3, 4 … gibi hangi doğal sayı gelirse gelsin sonucun "0"a eşit olacağı kolaylıkla söylenebilir. Bu sonucun söz olarak ifadesi "**sıfırdan farklı bir sayının sonsuza bölümü 0'a gider**" şeklindedir ki matematikte kapalı birçok kapının açılmasına yol açmıştır.

Bir çelişkiden yarattığımız önemli sonucu bir yana bırakalım ve asıl soruya geçelim: "Aşil kaplumbağaya kaçıncı metrede yetişir." Soruyu bir başka biçimde şöyle sorabiliriz: Aşil kaplumbağaya yetiştiğinde kaç metre yol almıştır?

Yanıtın nasıl bulunacağı açık. Aradaki farkları toplarız olur biter ki farkları yukarıda söylemiştik. Yapılacak işlem matematiksel olarak;

"$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... = ?$" işlemi.

İşte burada yine sorun var. Toplanacak sayılar sınır tanımıyor. Aldı başını gidiyor… Gel de topla. İş başa düştü.

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... = 111 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...$$

eşitliğini yazabiliriz.

Sorun biraz daha belli oldu. 111 işin kolay yanıydı.

Ya "$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$" toplamı nasıl yapılacak?

Önce düzene koymalı yani biçimlendirmeli ve sonra birkaç akıllı hamle yapmalıyız. Bu toplama *X* demekle başlayalım.

$$X=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$$

Hep $\frac{1}{10}$'un katları. $\frac{1}{10}$'dan sonrasını, "$\frac{1}{10}$" parantezine alalım.

$X=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}.(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...)$ olacaktır.

Parantez içindeki toplama "X" demiştik. Yerine koyalım.

$X=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}.X$ olur ve bir oh çekeriz. "....." dan kurtulduk! Artık işleme devam:

$$X=\frac{1}{10}+\frac{X}{10};$$

$$X-\frac{X}{10}=\frac{1}{10};$$

$$X(1-\frac{1}{10})=\frac{1}{10};$$

$$\frac{9X}{10}=\frac{1}{10};$$

$9X=1$ ve

$X=\frac{1}{9}$ olur ki aranan toplam;

$111+\frac{1}{9}$'dan $\frac{1000}{9}$ olacaktır.

Şimdi bir soluk almayı hak ettik. Duralım ve kazanımlarımıza bakalım.

Birincisi; güzel bir akıl yürütmeyle (güzel diyorum çünkü yaşam gerçeğiyle bir çelişkiye son verdik) **1/∞ → 0** sonucuna ulaştık. Bu bizi; 3/∞ → 0, (3/5)/∞ → 0, … gibi,
yani "**sayı/sonsuz → 0**" kalıcı genel sonucuna götürdü.

İkincisi; $X = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$ işleminde zarif bir hamle yaparak

$$X = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}.(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots) \text{ ve}$$

$$X = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}.X \text{ eşitliğinden}$$

$$X(1 - \frac{1}{10}) = \frac{1}{10} \text{ ile devam ettik.}$$

Yani sayılar sonsuza da gitse elimizden kurtulamadı.

Ama matematikçilerin iflah olmaz bir yanı vardır. Sürekli soru sorarlar kendilerine. Neden diye, niçin diye… "Acaba" da hep vardır kafalarının bir yerlerinde. Biri sormasa bir diğeri mutlaka sorar: Keramet, toplanacak sayıların "$\frac{1}{10}$"un kuvvetleri olmasında mı? Resmin güzelliği ağacın güzelliğine bağlıymış gibi!

Bu sorunun çözümü için matematiğin kullandığı yol "genelleme"dir. Yani her sayı için doğru olduğunu göstermek. Bunu gösterirsek kerametin "$\frac{1}{10}$"da olmadığı anlaşılacaktır.

Aşağıdaki teoremin ispatıyla matematiğin dozunu biraz daha arttıralım.

Teorem: $m \notin R,\ \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \ldots = \frac{(\frac{1}{m})}{(1 - \frac{1}{m})}$'dir.

İspat: Eşitliğin sol yanına *X* diyelim.

$X=\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\ldots$ biçimine dönüşür ve tüm terimler $\frac{1}{m}$'nin katlarıdır. Bu kez azıcık farklı davranarak tüm terimleri "$\frac{1}{m}$" ortak çarpan parantezine alalım.

$X=(\frac{1}{m}).(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\ldots)$ olacaktır. İkinci parantezde "$\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\ldots$" yerine değerini yani *X*'i yazarsak eşitlik, $X=(\frac{1}{m}).(1+X)$ durumuna gelir.

Devamla $X=(\frac{1}{m})+(\frac{X}{m})$;

$X-(\frac{X}{m})=(\frac{1}{m})$ olur.

Sol yan *X* ortak çarpan parantezine alındığında;

$$X(1-\frac{1}{m})=\frac{1}{m} \text{ ve } X=\frac{1}{m}(\frac{1}{1-\frac{1}{m}})=\frac{(\frac{1}{m})}{(1-\frac{1}{m})}$$

bulunur ki bulmamız gereken de buydu.

$X=\frac{1}{9}$'u bulurken uygulanan zarif işlem,

$\frac{(\frac{1}{m})}{(1-\frac{1}{m})}$ genellemesine dönüştü ki bu genelleme çok yönlü kullanılacak anahtar gibidir. Bu elbette önemli. Ama adım adım, her satırda sektirmesiz yaptığımız işlemler daha mı az önemli? Her adım bir ahenk içermiyor mu? Önemli olan bunun farkında

olmak ve daha da önemlisi bunu paylaştığımız öğrenci bu ahengi yaşıyor mu? Bunun için yeterli zaman ayırıyor muyuz? Yoksa bu hazzı yaşatmadan hemen başka bir soruya mı geçiyoruz. Sel önünden kütük kapar gibi… O zaman biz bu ispatı neden yaptık. Hani duygu, hani sabır, hani dikkat? Bu durumda, yanlış bir nota bir müzik parçasını nasıl eser olmaktan çıkarırsa, yanlış bir işlem de matematiği matematik olmaktan çıkarır. Matematik de bir sanat eserinin oluşumundaki gibi özen ister, duygu ister, saygı ve sabır ister. Bir serüven gibi… deme hakkımız olur mu?

Sanatçı eserini "beğenilsin" kaygısı ile yapmaz. İçsel bir dürtüdür sanatçı için eser yaratmak. Beğeni, eser ortaya çıktıktan sonraki bir durumdur. Elbette beğenilmenin bir hazzı vardır. Matematikçi de "beğenilsin" diye matematik yapmaz. Cahit Arf, "başlangıçta alkış almayı istedim. Aldım da. Alkış kısa sürede önemini yitirdi" der. Arf'ın bu söyleminde apaçık olan beğeni duygusuyla matematik yapmadığıdır. Söylemdeki daha gizemli ve bana göre daha önemli sonuç ise matematiğin biteviyeliği ve kışkırtıcılığıdır. Matematikte ulaşılan bir sonuç yeni sorulara, o sorular yeni sonuçlara gebedir. Sorularla, sonuçlarla bezeli bir süreç. Sürecin kendisidir güzel olan. Yukarıda örneklediğimiz gibi sorular sonuçları, sonuçlar soruları kışkırtır. Açmayı bekleyen yeni filizler hep vardır matematikte. Açtıkça açası gelir insanın…

Biz yukarıdaki süreci yeni bir soruyla sürdürelim. Verdiğimiz örnekler azalarak sonsuza giden sayılarla ilgili idi. Ya artarak sonsuza giden sayılarla ilgili benzer sonuçlara ulaşabilir miyiz? Bu kez doğrudan genellemeyle bakalım. Sorumuz sınırlı çokluklarla ilgili olsun.

Soru: $a+a^2+a^3+a^4+\dots\dots\dots+a^{(n-1)}+a^n$ toplamı $a \in R$ için neye eşittir?

Çözüm: $X = a+a^2+a^3+a^4+\dots\dots\dots+a^{(n-1)}+a^n$ diyelim. Önceki örneklerde yaptığımıza benzer işlemler yapalım.

$X = a+a(a+a^2+a^3+a^4+\dots\dots\dots\dots+a^{n-1})$ olur. (I)

$X = a+a^2+a^3+a^4+\dots\dots\dots\dots+a^{(n-1)}+a^n$ den; (ilk eşitlik)

$X-a^n = a+a^2+a^3+a^4+\dots\dots\dots\dots+a^{(n-1)}$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik, (I) de yerine yazılırsa;

$X = a+a(X-a^n)$ eşitliği elde edilir. Buradan:
$X = a+a.X-a.a^n$;
$a.X-X = a.a^n-a$ (ilk taraf "X", ikinci taraf "a" parantezine alınarak)
$X(a-1) = a(a^n-1)$'den

$$X = \frac{a(a^n-1)}{(a-1)}$$ veya

$$X = \frac{(a^{n+1}-a)}{(a-1)}$$ elde edilir.

Görülüyor ki arayış bizi kesin ve yepyeni bir sonuca götürdü. Yeni arayışlarla yeni sonuçlar; devam… Bu kez işlemi sonsuza taşısak sonsuzu aydınlatabilir miyiz?

Sonsuzu ışıtmak

Az önceki soruda $n \to \infty$ (n sonsuza gider) olduğunu düşünelim. Elde ettiğimiz bağıntının; $X = (a^{\infty+1}-a)/(a-1)$ olacağı açıktır. Açıktır da, ($a^{\infty+1}$)hatta tek başına (∞+1) ne olacak? Bizden çok önce de sorulmuş bu soru ve uzun süre sorun olmuş. Ve de imdada Cantor yetişmiş. Hem de çok duru, en süzme akıl biçimiyle… Soru da şöyle sorulmuş: "Bütün parçasından büyük müdür?" Yanıtı belli gibi: "Elbette büyüktür!" Bakalım…

1. Adım: "D" 1'den 100'e kadar doğal sayıları, "Ç", 1'den 100'e kadar çift doğal sayıları göstersin. Çift doğal sayıların, doğal sayıların 2 ile çarpılarak elde edildiği açıktır. 2×1 = 2, 2×2 = 4, 2×3 = 6… gibi. Yani $n \in$D ve $2n \in$Ç dir. Kümeler;

D = {1, 2, 3, 4,…………… 99, 100} ve

Ç = {2, 4, 6, 8, …………… 98, 100} şeklinde yazılır. Şimdi bu iki kümeyi karşılaştıralım.

D = {1, 2, 3, 4, ... , 49, 50, ... , 99, 100}
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
Ç = {2, 4, 6, 8, ... , 98, 100}

Görüldüğü gibi Ç⊂D (D kümesi Ç'yi kapsar) ve D kümesinin eleman sayısının Ç kümesinin eleman sayısından çok olduğu açık. Yani; **bütün parçasından büyük.**

2. Adım: Her iki kümeyi sonlu olmaktan çıkaralım. Sonsuza yürüsünler.

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n, n+1, \ldots\ldots\}$

$N_Ç = \{2, 4, 6, \ldots\ldots, 2n, 2n+2, \ldots\ldots\}$ Yine çift doğal sayıların "2.*n*" le elde edildiği görülüyor.

Artık karşılaştırmak kolay.

$$\begin{array}{l} N = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\ldots\} \\ \quad\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \qquad\ \ \downarrow \quad\ \downarrow \\ N_Ç = \{2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ 2n+2,\ \ldots\ldots\} \end{array}$$

Bu kadar. Basit bir eşleme. Her doğal sayının iki katı bir çift sayıdır. Öyleyse ne kadar doğal sayı varsa o kadar çift doğal sayı vardır. Kim diyebilir ki, doğal sayılar kümesinin elemanları, alt kümesi olan çift doğal sayı kümesinin elemanlarından daha azdır diye? Ya da "bütün parçadan büyüktür" diye…

Cantor'un sonsuzlukla ilgili çalışmalarını okuduğumda hayran olmuştum. Sanki bir iki fırça darbesiyle tarihin heykelini yapar gibiydi. Bu kuram sayesinde sonsuzlukla ilgili bellediklerim anlam kazanmıştı. Elbette Cantor'un çalışması bu kadarla kalmamış. Sayılabilir sonsuz, sayılamaz sonsuz gibi yeni kavramlar ve kuramlar geliştirmiş. Bu kuramlar kümeler teorisini ortaya koymuş, özellikle fonksiyon analizine yepyeni anlamlar kazandırmıştır. En basit ve yaygın anlamda da; "$\infty+5$", "$\infty-5$", "$\infty\times5$", "$\infty+\infty$" ve benzerlerinin neden sonsuz olduğu, "$3/\infty$"un neden "0" olduğu, "$\infty-\infty$", "$0\times\infty$", "∞/∞", "0/0"ın neden belirsiz olduğu bu yolla anlamlı hale gelmiştir. Ve ben de şunu öğrenmiştim: Yukarıdaki özgün karşılaştırmayı yapmadan sonsuzla yapılan işlemler ve hele de belirsizlik gidermeye çalışmak beyhudeydi.

Çocuktan al haberi

Yakın zamanda yaşadığım bir olayda da, insan aklının çelişkilerinden olan azlık, çokluk kavramının bir çocuk aklı için bile ne denli düşünmeye değer olduğunu anladım. Torunum Sarp 4 yaşından küçüktü. Ziyaretlerine gittim. Diğer dedesi zaten yanlarındaydı. Nedenini anımsamadığım bir anda Sarp iki elini yana açıp; "yahu benim ne çok dedem oldu" dedi. Çocukların bek-

lenmedik tepkileri bizleri hep şaşırtır. Hep beraber güldük. İki dede, çok dede… Biraz zaman geçti. Sarp sehpanın üzerindeki arabalarıyla oynuyor. En az 5-6 araba var. “Sarp” dedim. “Arabaların mı çok, dedelerin mi?” Bu kez o şaşırdı. Başını kaldırıp dedelerine sonra arabalarına baktı bir şey söyleyecek gibi oldu. Ama söylemedi. Belki de söyleyemedi. Gözlerime bakarak gülümsedi, arabalarıyla oynamaya devam etti. Sanırım iki ile sınırlı dede sayısıyla, 6 ile sınırlı olmayan arabalarının sayısını karşılaştırmak ona uygun görünmemişti.

Anımsadıklarım beni şimdi de çocukluğumdaki bir yaşanmışlığa götürdü. 8-10 yaşlarımda olduğumu anımsıyorum. Uzun bir tren yolculuğundayız, Orta Anadolu civarında. Akşam karanlığı bastığında kimseye “çaktırmadan” koridora süzüldüm. Koridor boş. Zaten boş olmasını bekliyordum. Aklıma takılan soruya yanıt arıyorum.

Önceden yanıma aldığım tebeşirle yere bir çizgi çizdim ve olanca gücümle havaya doğru sıçradım. Nereye düşecektim? Umduğum gibi olmadı yine çizginin üstüne düştüm. Bir daha bir daha denedim. Bu arada birileri “deli mi bu” demesin diye gözüm sağda solda. Denemeler değişmedi. Hep çizginin üzerine düşüyordum. Oysa beklentim, ben havada asılı iken trenin altımdan kayıp gitmesiydi. Olmamıştı. Merakımı gideremeden kompartımana girdim. Bana ayrılan yere kıvrılıp uyudum. Sabah uyandığımda ortalık aydınlanmıştı. Camdan dışarı baktım. Olağanüstü bir güzellik. Göz alabildiğine sapsarı başaklar. Ve de pırıl pırıl. Güneş görünmüyor ama ışıkları başakları yalıyor. Belli ki hafifçe de bir rüzgâr esiyor. Başaklar dalga dalga ışıklı ve gölgeli. Sanki bir el tarıyor gibi. Uzun süre gözlerimi ayırmadan izledim. Şu anda bile görüntü belleğimde… Ve heyecan verici…

Ne ilişkisi var söylediklerimin sanat ve matematikle? Sanırım burada ortak yan her ikisindeki olağanüstülük. Cantor’un sonsuzluğu ele almasında ve oluşturduğu kuramların birçok soruna çözüm getirmesindeki olağanüstülük. İnsan soyunun anlama ve anlamlandırma aşkındaki olağanüstülük. Doğanın deviniminin insan düşüncesinde yarattığı olağanüstülük… Dali’nin tablosunda atın (ya da yaratığın) ayağının insan boyunun kat kat fazla ol-

masındaki olağanüstülük. Mağara resimlerinde atın üzerindeki adamın attan çok daha büyük olmasındaki olağanüstülük… Dali mi doğru, mağara ressamı mı? Her ikisi de mi? Ressam benim gördüğüm atı resmetseydi sanat olur muydu? Matematikte de sanatta da her ikisinde de akıl ve duygu estetiğinin olağanüstülüğü yok mu?

Dâhilik şart mı?

İsmihan Yusubov'un Bilim ve Gelecek Kitaplığı'ndan çıkan *Matematik Güzeldir* adlı kitabında bir söyleyişi var: "Dâhilerin saçmalamaları da dâhicedir." Büyük matematikçi olmak için dahi olmak gerektiği düşünülür. Bazı matematikçiler ise farklı düşünüyor; sabır, inat ve haz duyma matematikçi olmak için daha temel gereksinimdir diyorlar. Hangisi daha doğru emin değilim. Ama "matematik öğrenmek" için sabır ve haz duygusunun öncelikli olduğuna inanmışımdır. Dahi olmadığını bildiğim birçok öğrencinin çok ilginç yaklaşımlarla (dahice demiyorum) soru çözdüğünü hep gözlemişimdir. Beni de şaşırtan…

Bir lise grubu ile problem çözümünde denklemleri kullanma çalışması yapıyoruz. Bir soru sordum:

Ali ile Ayşe'nin paralarının toplamı 600 lira. Ali Ayşe'ye 50 lira verirse, Ayşe'nin parası Ali'nin parasının iki katı olmaktadır. Başlangıçta Ali'nin kaç lira parası vardı? Sayılar bire bir böyle olmasa da soru bu kapsamdaydı. Soru lise öğrencisi için zor değil. Amacım denklem kullanımının gereğini vermek. Çözüm için beklediğim Ali'nin parasına x, Ayşe'nin parasına y denmesi ve $x+y = 600$ ile $2.(x-50) = y+50$ denklem sistemiyle soruyu çözmeleri. Ya da Ali'nin parasına x, Ayşe'nin parasına $600-x$ denilerek, $2.(x-50) = 600-x+50$ bir bilinmeyenli denklemini kurup soruyu çözmeleri. Sorduktan 3-5 saniye sonra bir kız öğrencim "250" yanıtını verdi. Kâğıt kalem kullanmamıştı. Yanına gittim. Nasıl çözdüğünü sordum. "Hocam para alışverişi olsa da olmasa da toplam para değişmiyor. Son durumda Ayşe'nin iki Ali'nin bir kat parası var. Toplamı üç kat. 600'ü 3'e böldüm 200 lira. 200, Ali'nin 50 lira vermiş hali. Demek ki 200+50 = 250 lirası varmış."

Plânlarım alt üst oldu. Oysa ben sorunun çözümünü iki bilinmeyeni olan iki ayrı denklem kurarak tartışacaktım. Ayrıca iki bilinmeyenli yerine bir bilinmeyenli denklemle de… Öğrenci deyim yerindeyse beni de soruyu da açığa düşürmüştü. Çözümü net, çözüm tam ve akıllıca. Öğrencinin Cahit Arf'ı bilmediğini sanmam. Ama Cahit Arf'ın "ben soru çözerken değişmezlerden yola çıkarım" söylemini bildiğini sanmıyorum.

Bir sorunun birden çok çözümü olduğu gibi bir teoremin de birden çok ispatı olabilir. Bazı ispatlar oldukça ilginçtir.

Ne güzel

Teorem: Sıfırdan farklı bir doğal sayı ile tersinin toplamı en az 2'dir.

Teoremi matematik dili ile yazarsak;

Teorem: $n \in \mathrm{N}$ ve $n \neq 0$ ise $n + (\frac{1}{n}) \geq 2$'dir.

İspat: 1) Önermenin doğruluğunu göstermek için;

$n + (\frac{1}{n}) \geq 2$ ise; payda eşitlenerek

$\frac{(n^2 + 1)}{n} \geq 2$; $n^2 + 1 \geq 2n$;

$n^2 - 2n + 1 \geq 0$'dan;

$(n-1)^2 \geq 0$ elde edilir. Bu önermenin "n" in 0'dan büyük bütün değerleri için doğru olduğu açıktır.

İspat: 2) $n \neq 0$ ve $n \in \mathrm{N}$ olduğu için,

$n \geq 1$;

$n - 1 \geq 0$;

$(n-1)^2 \geq 0$;

$n^2 - 2n + 1 \geq 0$;

$n^2 + 1 \geq 2n$ ve her iki yan "n" e bölünürse;

$n + (\frac{1}{n}) \geq 2$ elde edilir.

Birinci ispat, verilen önermenin doğru olduğunu göstermek biçimindedir. Uygun her teoremin ispatında bu yol izlenebilir. İkinci ispat ise burada vurgulamak istediğim şeyler için yapılan ispattır. "n–1" in 0'dan büyük olduğu gerçeğinden başlayıp bir iki satırda (elbette doğru matematik işlemlerle) istenilen önermeyi elde ettik. Bu ispatın güzelliği, kullanılacak matematik önermeleri doğru seçmekte ve yöntemin sadeliğinde.

Elbette bu ispatın ardından; $n \neq 0$ koşuluyla "n"in pozitif rasyonel sayılar, negatif tam sayılar... değerleri için hangi koşulları sağlayacağı da tartışılabilir. Bir ispat, ispatlar dizgesine dönüştürülebilir.

Fazla söze gerek var mı?

Bazı soruların çözümünde genel yöntemler kullanıldığı gibi şaşırtıcı çözümler de vardır. Basit ve kolay ama akla gelmeyen…

Soru: 500 takımın katıldığı tek elemeli şampiyonada, şampiyonu belirlemek için kaç maç yapılır?

Çözüm: "Yapılacak nedir?"le başlayalım. Takımlar ikişer ikişer eşleşecek. Eşlenen takımlar maç yapacak. Biri mutlaka elenecek. Kalanlar yeniden eşlenmeye devam edecek. Son maç şampiyonu belirleyecek.

Takım sayısı	Maç sayısı	Kalan takım
500 (250+250)	250	250
250 (125+125)	125	125
125 (62+62+1)	62	63
63 (31+31+1)	31	32
32 (16+16)	16	16
16 (8+8)	8	8
8 (4+4)	4	4
4 (2+2)	2	2
2 (1+1)	1	1

Maç sayısı toplamı: 250+125+62+31+16+8+4+2+1 = 499

Buradaki gibi çizelge hazırlamasak da çözüm uzunca. Hep ikiye böleceksiniz, çıkaracaksınız ve sonunda toplayacaksınız. Takım sayısı tek olduğunda bir takımı bekletip uygun durumda eşlemeye ekleyeceksiniz… Çözüm için başka öneriler de olabilir.

Ama bir matematikçinin çözümü şu: 500 takımdan biri şampiyon olacak, 499'u elenecek. Her eleme bir maçla olacağından, maç sayısı elenen takım sayısına eşittir… Bu çözümün akılcılığına, inceliğine şapka çıkarmayacak biri olabilir mi?

Bazı aktarmalarla matematik ve sanat ilişkisini vurgulamaya çalıştım. Anlaşılmıştır ki inancım matematiğin estetik yönünün güçlü olduğu biçiminde. Bazıları için derin hazlar yaratan matematikte bu hazzı yaratan "estetik"ten başka ne olabilir? Bazı öğrenciler kendi sezgileriyle matematiğin hazzını keşfediyor. Bu hazzı bazı öğrenciler seziyor ve duyuyorken büyük bir çoğunluk neden duymuyor? Bunun yanıtı bende çok net. Öğretimde matematiğin estetik yapısını ihmal ediyoruz. Hatta öğretenler olarak biz de çok farkında değiliz. Bilinsin ki bu bölümü yazarken yazmak için araştırırken bile yepyeni heyecanlar duydum. Daha önce düşünmediğim… Ve şimdi düşünüyorum ki; matematiğin her konusu, her matematiksel ispat, her soru çözümü estetik içerikli olarak ele alınabilir.

-VII-
NE YAPMALI?

Sorunları görmek işin bir yanı. Bunu eğitim süreci bölümünde yaşadıklarımızla ortaya koyduk. Eksik ya da fazla. Sorunlu ortamda yaptığımız işi olabildiğince doğru yapmaya çalıştığımızı da yansıtmaya çalıştık. Öğrenciye, bilime ve öğretmenlik bilincine saygılı olan her öğretmenin yaptığı gibi. Matematiğe ve matematik öğrenmenin önemine duyduğumuz inançla, matematiğin önemini gelişimini ve derinliğini de yansıtmaya çalıştık. Yine elimizden geldiğince… Tüm bunları ortaya koyarken deney ağırlıklı davrandık elbette. Bu kaçınılmaz… Ama bilimsel verileri de göz ardı etmedik. Ve bunu yapan sadece ben değilim. Çok öğretmen aynı şekilde davrandı. Bizler başarının üniversite sınavında çözülecek soru sayısıyla ölçüldüğü eğitim ortamında "matematik öğrettik". Ama yine de "söylenen çaresizler" olmadık. Sorunların nasıl çözülmesi gerektiği konusunda da önerilerimiz var. Çözme sorumluluğunda olanların görmediği, görse bile çözme becerisini gösteremeyenler için bu öneriler. Çok zor da değil çözümler. Yeter ki yetkiyi elinde bulunduranlar, "öğretmen beceriksiz", "geçmiş öğretim iyi değildi", "matematik zor" gibi bahanelerin arkasına sığınmasın.

Yukarıdaki saptamalar ışığında alınması gereken tedbirlerin iki temel boyutu; planlama ve uygulamadır. Planlama, "öğretim programlarını düzenleme", "öğretim yöntemlerini belirleme", "pilot uygulamalarla doğruluğunu sınama", "öğretmen yetiştirme programlarını düzenleme"yi kapsar. Uygulama ise, "öğretim ortamlarını düzenleme", "öğretmen eğitimi", "yöntem geliştirme", "hizmet içi eğitimler" gibi çalışmaları kapsar.

ÖĞRETİM PROGRAMLARININ HAZIRLANMASI

Çok yeni yaşadığım bir olayı anlatayım. Nesin Vakfı'nda dokuzuncu sınıf öğrencileriyle ders yapıyoruz. Öğrenciler okulda öğretmenlerinin sorduğu sorunun nasıl çözüleceğini sordular. Soru şu:

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2} \text{ ve } a+b+c=60 \text{ ise } a \text{ kaçtır?}$$

Soru oran-orantı konusu ile ilgili. Doğal olarak oran-orantı kavramını ve orantının özelliklerini anlatmaya başladım. Bir öğrenciden itiraz geldi. "Okuldaki öğretmenimiz bize böyle anlatmadı." Sordum: "nasıl anlattı öğretmeniniz?" Yanıt: "eşitliğin karşısına 'k' yazıyoruz. a'ya $5k$, b'ye $3k$, c'ye $2k$ diyoruz…" Diğerleri de onayladı. "Evet, öyle yapıyoruz." "Neden öyle?" sorusunu sorduğumda "öğrenmiş" olan öğrencinin yanıtı, "bu sorular öyle çözülüyor" biçiminde oldu. Diğer öğrencilerin yanıtı ise "anlamadık ki!" biçiminde. Tam bir kör dövüşü. Bu kör dövüşünü öğretmeni suçlamak adına yapmıyorum. Çok yüklü bir dokuzuncu sınıf müfredatı olduğunu biliyorum. Ayrıca öğrencilerin ortaokuldan donanımlı gelmediklerini de biliyorum. Öğretmen sene sonuna kadar bu müfredatı bitirmek zorunda. Yoksa hiçbir öğretmen "bu sorular böyle çözülür" diye ders anlatmaz. Daha başka örneklerle de açıklanabileceği gibi bu durumda ne "öğretmen öğretebilir", ne "öğrenci öğrenebilir" konumdadır… Hemen burada belirteyim ki, bu söylediklerimin arkasından birileri "çağdaş öğretmen, öğreten değil öğretim ortamını hazırlayandır" diyecektir. Üzülerek söyleyeyim ki bu doğru saptama bu koşullarda, "entel" bir söylem olmanın ötesinde hiçbir şey ifade etmez.

Sadece yukarıdaki örnek bile matematik programının hazırlanmasındaki ilkelerin belirlenmesi için yeterlidir. Bu bağlamda matematik programı:

1) Öğrencinin "matematik öğrenmesi gerektiği"ni bileceği içerikte olmalıdır. Bu nedenle müfredata, ne zamandan beri matematik, niçin matematik, matematiksel düşünüş nedir… gibi sorulara yanıt olacak konular eklenmelidir. Liseler (meslek liseleri dışında) öğrencilerin meslek edindikleri okullar değildir. Bu nedenle meslek liseleri dahil belirlenen konular "matematik kültürü"nü içerecek yeterlilikte olmalıdır.

2) Lisede işlenecek konular, lise öncesi dönemde okutulan konularla uyum içinde olmalıdır. Çünkü lise ve öncesi dönem öğrenim bir bütünlük gösterir. Konular birbirini destekler yapıda ve de öğrenme yaşı grubuna göre "derinleşme"yi içerecek nitelikte seçilmelidir.

3) Günlük yaşamın gerektirdiği matematik dışında, "matematiksel düşünme", "neden sonuç ilişkilerinde doğru yargılara varma", "problem çözme becerisi", "matematik yapı ile diğer disiplinler arasındaki ilişkiyi fark etme", "fark ettiği ilişkileri kullanabilme"… gibi yeteneklerin geliştirilmesini sağlamalıdır. Öğrenilebilirliğin ölçüsü kesinlikle "programı kolaylaştırmak" olmamalıdır. Örneğin bu programda analiz konuları da yer almalıdır. Uygun bir programla lisede sosyal bölüm okuyan öğrenci bile kavramsal düzeyde türevi ve temel türev alma kurallarını öğrenebilir. Yeter ki 40 formül ezberleyeceği bir türev olmasın… Eğer bir öğrenci üniversitede mühendislik okuyacaksa, ileri derecede türevi üniversitede öğrenir. Lisede doğru bir altyapı kazandırılmışsa kolaylıkla da öğrenir.

4) "Kolay öğrenilebilirlik" ilke olamayacağı gibi, "üniversitede gerekecek matematiğe göre" de konu belirlemekten kaçınmak gerekir. Elbette bu saptama kaçınılmaz olan bağdaşıklığı reddetmek anlamına gelmez. Ama "bunlar üniversitede gerekecek" dayatması öğrenci için gerçekçi değil. Üniversite matematiğine göre konu seçmek gerçekçi olmadığı gibi anlamlı da değil. Çünkü tıp fakültesinde okuyan öğrenci ile hukuk fakültesinde okuyan öğrencinin matematik gereksinimleri konu yönüyle

tamamen farklı. Ancak yukarıda sözünü ettiğimiz "matematik kültürü" her öğrenci grubu için ortaktır.

Çok yakın zamanda yaşadığım olay bu söylediklerimin kanıtıdır. Endüstri mühendisliği okuyan bir yakınım yardım istedi. Konu lise matematik müfredatında olmayan kardiyiot, lemniskat gibi eğrilerin grafiklerinin çizimi ve yorumlanmasıydı. Ancak asıl sorun bunu yapabilmek için gerekli ön bilgilerdeydi. Yani lise matematiğinde. Öğrenci, fonksiyonun kutupsal (açısal) koordinatlara göre yazılışını ya da trigonometrik yaklaşımları ve bölgelerde açı yorumlama, periyot bulma ve benzeri temel matematik bilgileri özümsememişti. Bunları ele aldık ve öğrenci "tamam, gerisini ven hallederim" dedi ve de halletti. Sormadım ama sanırım türev alma kurallarını sorsam sıralayabilecekti.

5) "Matematik kültürü" olarak düşündüğümüz matematik programı, liselerde belirlenen alanlarla da çelişmez. Meslek liseleri ya da liselerin fen bölümleri için farklı matematik konuları belirlenebilir. Ancak bu da gereksinime ve öğrencinin ilgi alanına göre olmalıdır. Bu belirlenme aynı zamanda liselerde edebiyat bölümünü, "matematiği beceremeyen" öğrencilerin alanı olmaktan çıkaracaktır.

6) Gerekli ve yararlı matematiğe, "estetik matematik" mutlaka eklemlenmelidir. Bu eklemlenmeden kastımız konu seçimi değil. Hangi konular seçilirse seçilsin... Her konu matematiksel estetik içerir. Önemli olan bu estetiği konuların içeriğine eklemlemek ve işleyişi ona göre düzenlemek. Estetik yanıyla güçlendirilmiş bir matematik programı hem öğrenmeyi kolaylaştıracak, hem de kalıcı öğrenme koşullarına uygun olacaktır.

7) Elbette belirlenen sürede, belirlenen öğretim programının uygulanmasının en temel kıstası zamanla ilgilidir. Eğer uygun zaman için uygun program seçilmezse sıraladıklarımızın hiçbiri gerçekleşemez.

Yukarıda sıraladığımız ilkelerin uygulanabilirliği bazılarınca tartışmalı olabilir. Hatta afakî de gelebilir. Ama sıraladığımız birçok şey, yaşadığımız koşullarda belirli ölçülerde ve de koşullara rağmen uygulanan şeyler. Tek tek öğretmenler ya da bir okulda çalışan öğretmen grubu mevcut müfredat içinde bazı

iyileştirmeler yapıyor. Elbette yapabileceği kısımlarıyla. Eğer bu ilkelere uygun bir öğretim programı ortaya koyabilseydik daha kolay tartışılabilirdi. Bunun kolay olmadığını biliyorum. Çünkü öğretim programı hazırlamak bir uzmanlık alanı. Ayrıca uzman bile olsa bir ya da birkaç kişinin kolaylıkla yapabileceği bir şey değil. Program uzmanlığı dışında, matematik, psikoloji, ölçme… uzmanlarına da gereksinim var. Ama mutlaka uygulayıcılara da. En çok da göz ardı edilenin bu olduğunu sanıyorum: öğretmenlerin düşüncelerine önem vermemek! Oysa aksaklıkları en iyi gören, hangi konuların nasıl öğrenildiğini en iyi bilen öğretmenlerdir.

Yine özellikle ihmal edilen en önemli yanlardan biri pilot uygulamalarının yapılmamasıdır. Nedeninin de "falan ülke böyle uyguluyor" yanlışı olduğunu düşünüyorum. "Falan" ülkede uygulanan mükemmelmiş gibi. Oysa görece olumluluklar olsa da dünyaya model olabilecek bir matematik programı örneği yok… Benim müfredat hazırlayanlara önerim şu: Yapmaya cesaret edin, yapın, örnek olabilecek bir modeli siz üretin!

ÖĞRETİM YÖNTEMLERİNİN KAVRANMASI

Daha önce de belirttik. Öğretim programlarında değişiklikler yapılabileceği gibi öğretim yöntem ve metotlarında da değişikliklerin yapılması doğaldır. Doğallığın da ötesinde değişen toplumsal koşullar, gelişen teknoloji, ya da yeni ortaya konulan yararlı yöntemlerin kullanılması anlamında gereklidir de. Denilebilir ki; değişen koşullara bağlı olarak öğretim yöntemlerini geliştirmek öğretim programlarını yenilemekten daha da önemlidir. Çünkü saptanmış konunun kavratılması seçilen öğretim yöntemine bağlıdır. Eğitimin en esnek olunması gereken yanı öğretim yöntemlerinin uygulanmasıdır. Ve bu yöntemler, eski öğretim yöntemlerinin üzerine inşa edilir. Bu nedenle eski yöntemlerin bilinmesi ve irdelenmesini gerektirir. Öğretim yöntemlerindeki arayışlar evrensel bir boyut içerir. Bu nedenle başka ülkelerin öğretim yöntemleri irdelenmeli ve araştırılmalıdır. Öğretim yöntemlerinin uygulanabilirliği uygun öğretim ortamları gerektirir. Bu nedenle öğretim ortamları gözlenmeli

ve geliştirilmelidir. Öğretim yöntemlerinin uygulanabilirliği, uygulayıcının donanımıyla doğrudan ilintilidir. Bu nedenle öğretmen yetiştirme önemle ele alınmalıdır. Ama özetle verdiğimiz bu arayışlar; önceki öğretim yöntemlerini irdelemeyi eskiyi karalayarak, evrensel boyutlu gelişmeleri başkalarına öykünerek, öğretim ortamlarını geliştirmeyi teknoloji görgüsüzlüğüne kapılarak yapılırsa olumlu adımlar atılamaz. Yoksa "öğrenci merkezli öğrenme" der bir süre o sakızı çiğnersiniz. "Aktif öğrenme" der bir süre onun tartışmalarını yaparsınız. "Etkinlik temelli ya da proje bazlı öğretim" der onu konuşursunuz. "Yapılandırmacı öğretim" der onu kovalarsınız... Ve ömür kovalamakla, konuşmakla, tartışmakla geçer. Bu kadar tartışmanın ardından da "neden bizim uluslararası başarımız düşük" diye yakınırsınız. O nedenle doğru, kalıcı ve çözücü olan, ilkelerin belirlenmesi ve bu ilkeler yönlendiriciliğinde hareket edilmesidir. Bu ilkeler:

1) "Derinlik ve kalıcılık" ilk göz önünde bulundurulacak yaklaşım olmalı. Uygulanan yöntem veya yöntemler ele alınan konular yaratıcı öğrenmeye uygun olmalı ki, sınıf ortamında bilgi kolektif olarak üretilsin ve kalıcı olsun. Elbette yaratıcı öğrenmenin merkezinde öğrenci olacaktır. Bilgiyi üretme gücü, yeni öğrenmeleri kışkırtacak ve derinleşmeyi sağlayacaktır.

2) "Esneklik", her konu için aynı yöntemi kullanma şablonu ve zorunluluğunu ortadan kaldırır. Bir önceki ilkeyi destekleyen her yöntem sınıf ortamında kullanılmalıdır. Yeter ki kullanılan yöntem matematik ilkeleriyle çelişmesin. Matematik öğretiminde tek yöntemi tümevarımı esas alan "yapılandırmacılık" olarak belirlemek matematiğin tümdengelimci yapısıyla çelişebilir. Matematik öğretimi için çok önemli olan yaşamsal ilintiler ya da modellemeler anlamsız zorlamalara vardırılmamalıdır. Bolu dağı tünelini, doğru parçasına örnek vermek gibi...

3) "Genelleme" gerek matematiğin anlamlılığı ve gerekse bütünlüklü öğrenme yönüyle kaçınılmaz bir sonuçtur. Bu nedenle öğretim yöntem ve metotları genelleme özelliğine açık olmalıdır. Tüm dörtgenlerin iç açılarının toplamının 360 derece olma bil-

gisinin, kare, dikdörtgen vb. gibi özel dörtgenleri de kapsadığını bilmek gibi. Ya da öğretim programı öyle olmasa bile, koniklerin genel incelemesinin elips, hiperbol, parabolden önce ele alınması gereği gibi…

4) "Uygulanabilirlik" matematik öğretimini anlamlı kılan bir diğer özelliktir. Bilginin kullanılabilirlik ölçüsünde kalıcılığı da artar. Kastımız matematiksel bilginin fizik, kimya vb. gibi disiplinlerle kullanılmasıdır. Örneğin vektör konusunu işlerken, kuvvetle ilişkilendirilmesi gibi. Her ne kadar verdiğimiz örnek genel öğretim yöntemi ile ilgili olmasa da, yöntemin uygulanmasında belirleyici önem taşımaktadır. Bu nedenle öğretim yöntemi, uygulanabilirlik özelliğine açık olmalıdır.

5) "Estetik" yapı özellikle vurguladığım bir özellik. Bu özelliğin öne çıkarılması en çok da öğretim yöntemi ile olanaklı. Örneğin hareketin matematik dünyasında fonksiyon olarak modellenmesi ve oluşturulan modelden adım adım heyecan verici bilgilere ulaşılması gibi.

Yukarıda sıraladığımız ilkelere eklemeler yapılabilir. Çıkarılabilecek olanlarına ise itirazım var… Ama bir önemli itirazım da, öğretim yöntemlerini teknik boyuta indirgemeye… Öğretim yöntemleri saptama olarak elbette teknik bir konu. Uygulamada ise öne çıkan öğretenin ustalığı. Ve bu ustalık, yöntemleri bilmek kadar, uygulama isteğini içermektedir. Yani öğretmenliğin genelindeki duygusallık burada da önemli.

Bir yaşanmışlıkla bitireyim… Genç bir lise öğretmeni. Öğretmenlikte birinci ya da ikinci yılı. Konusunu anlatmaya çalışıyor. Hangi öğretim yöntemini uyguladığını bilmiyorum. Bu anlatıda önemli olan uyguladığı yöntem de değil zaten. Sınıfta kargaşa var. Hani öğrenciler buna "dersi kaynatma" derler ya. İşte öyle. Öğretmenin uyarıları yarar sağlamıyor ama yine de zil çalana dek dersini anlatmaya devam ediyor. Zil çaldığında öğrencilere: "Bir dakika arkadaşlar, sizden özür diliyorum. Başarılı bir ders işleyemedim, kendimi dinletemedim" diyor ve sınıftan çıkıyor. Ve arkasından bütün öğrenciler öğretmenler odasında. Öğretmenden özür diliyorlar. Sorun çözülüyor. Hem de iyi çözülüyor…

ÖĞRETMEN KILAVUZ KİTABI

Bir aktarımda bulunayım. İlk baskısı 1970 yılında yapılmış, Milli Eğitim Bakanlığı'nın Devlet Kitapları dizisinden, *İlkokul Matematik Kılavuzu* kitabı. Kısa önsözde yazarı Sabahattin Erdener şöyle diyor:

> Bu matematik kılavuzu 1968 İlkokul Programına ve Milli Eğitim Bakanlığı'nca verilen direktiflere uygun olarak hazırlanmıştır.
>
> Amacı, ilkokul öğretmenlerine müstesna hizmetlerinde yardımcı olabilmek dileğidir.
>
> Sayın meslektaşlarımızın, bu kılavuzda teklif edilen çalışma yöntem ve tekniklerinden üstün tecrübelere sahip bulundukları kabul edilmekle beraber; elverişli kaynaklardan yoksun çevrelerde çalışanları hesaba katarak açıklamaları genişletmek, örnekler vermek zorunlu görülmüştür. Hem aritmetik hem de geometri yönünden köy ve şehir ilkokullarının beş sınıfına, ayrıca ferdi farklara göre yazılmış olması, Kılavuzun hacmini artırmış bulundu.
>
> Bu sebeple, *Matematik Kılavuzu*'nu bir defada ve ayrıntılarına kadar incelemek yerine, önce tanışmak için ana çizgileriyle okumak; asıl işleme ve uygulama öncesinde, sırası gelen aritmetik ve geometri konularını incelikleriyle gözden geçirmek yararlı olabilir.
>
> 1968 İlkokul Programının matematik alanına getirdiği yeniliklere ışık tutacak çok değerli özel yayımlar da beklenir. Çünkü çağımızda matematik 'bilimlerin kraliçesi ve başlıca yardımcısı' sayılma seviyesine yükselmiş bulunuyor.
>
> Nitekim 'Kaynaklar' kısmında adlarını belirttiğimiz eserleriyle sayın yazarlar, bu kılavuzun hazırlanmasında büyük ölçüde yardımcı olmuşlar demektir.
>
> Bizim hizmetimiz, bir işçi arının yapabildiğinden ibarettir.
>
> En büyük övünme hakkı ise, elbette asıl neticeyi almakta ve alacak olan öğretmenlerindir.
>
> Matematik Kılavuzunda gözden kaçmış eksiklerin bağışlanmasını dilerim.

Gelelim bizim söyleyeceklerimize… Önce genel, sonra özel. Genel olan şu: Yıl 1970. Öncesi ve sonrasında da öğretmenin

meslek içi eğitimi düşünülerek kılavuz kitap hazırlanıyor. İçeriğe baktığınızda da (yazarın önsözde dediği gibi), uygulayıcının önünü açan bir kitap. Dikteden uzak, matematiğin ve matematik eğitiminin nasıl olması gerektiğini kavramış olanın yol göstericiliği… Daha önce de belirttiğimiz gibi o yıllarda kaynak oldukça az. Özele gelince o konuda da söyleyeceğim şu: Bu kitap bazı benzerleriyle beraber hâlâ elimin altında. İlkokullar için yazılmış olmasına karşın lise öğretmenliğim boyunca da zaman zaman yararlandığım bir kaynak. Bir de itirafta bulunayım. Kitap bir okulun demirbaşına ait. Açıkça el koymuşum bu kitaba. Ama eminim aynı kitaptan okul demirbaşında başkaları da vardı.

Geçmişte bu tür kaynaklar hizmet içi eğitimin bir parçası olarak alınırdı. Oysa bugün bu tür çalışmalar neredeyse yok sayılır. Denilebilir ki bugünkü koşullarda isteyene kaynak çok! Basılı kitaplar, elektronik ortamda makaleler vb. Elbette bunların içinde değerli olanlar da var. Ama birçoğu uygulanabilirliği kanıtlanmamış, alıntılarla dolu öğrenci tezleri türünde. Ne yazık ki önemli bir kısmı, önyargılarla dolu olan bu tezler birçok kez "bilimsel" diye karşımıza çıkıyor. İşte tam da bu nedenle ve de eğitimin bu denli tartışıldığı koşullarda "kılavuz" kitaplar yayınlanmalı. Hele de "geliştirme" adı altında öğretim programlarının, öğretim yöntemlerinin bu kadar çok değiştirildiği ortamda. Eğer "öğretmen kılavuz kitapları" olmazsa, "hizmet içi eğitim" dediğimiz zorunlu etkinlik yerine getirilmediği gibi öğretmen ders kitapları kaynaklığına mahkûm olur.

Bu noktada "öğretmen kılavuz kitabı" nasıl olması sorusuna da kısaca değinmek gerekir. Yukarıda önsözünü aktardığımız *İlkokul Matematik Kılavuzu* kitabından aktaralım. Kitap anlatılacak konu başlıklarını ayrı bölümler halinde ele almış. Örneğin başlıklardan biri: "Problem Çözme". Başlığın altı problem çözmenin matematik ve yaşam için gerekliliği ile zenginleştirilmiş. Alt başlıklar ise; 1. Her problemin çözümü özel bir amaca yönelmelidir, 2. Matematik probleminde bulunması gereken ortak özellikler, 3. Problemin yazılması ve yapılması sırasında kazanılacak alışkanlıklar, 4. Problemin çözülmesi. Diğer konu başlıkları da benzer anlayışla ele alınmış. Yani; 1) sorulacak so-

rulara boğulmamış sadece birkaç soru ile soru tavrı ve hedef örneklenmiş, 2) hedef davranışlar ve kazanımlar ortaya konulmuş, 3) öğretmene nasıl anlatılması gerektiği sezdirilmiş. Bana göre de olması gereken bu. Gereklilik, hedefler ve yönelim… Özellikle vurgulamak istediğim nokta kılavuz kitabın öğretmene "nasıl anlatılacağını anlatmak" değil "nasıl anlatılacağını sezdirmek" için hazırlanması gerektiği. Öğretmenin öğretim yöntemlerini bildiğine ve aldığı eğitime güvenmek gerekir. Şablon biçimindeki anlatma önerileri öğretmenin yaratıcılığını ortadan kaldırdığı gibi, içinde bulunduğu öğretim ortamına göre uygun "model" belirleme ve "örnek" seçme davranışının önünde engeldir.

DERS KİTAPLARI

Ne yazık ki matematik öğretiminde (ve de her dersin öğretiminde) öğretmen, ders kitaplarına mahkûmdur. Bu mahkûmiyet öğretmeni "kitabı aktaran"a dönüştürmektedir. Öğretmenin becerisi yarattığı modellerle, ürettiği örneklerle değil, sağdan soldan aktardığı sorularla ölçülmektedir. Bu nedenle de öğretmen ders etkinliğini geliştirecek yöntemler aramak yerine "zor soru" bulmak peşinde koşmaktadır. Çünkü (niyet iyi olsa da) ders kitapları bir anlamda yukarıdaki "kılavuz kitap"ın görevini üstlenmiş durumdadır. Konular adım adım anlatılmakta, her adımda verilmesi gereken örnekler, sorulması gereken sorular ve çıkarılması gereken sonuçlar… Bir anlamda öğrencinin ders etkinliği içinde kullanması gereken bir defter gibi. Bu nedenle de kitap öğrenci için boşlukları doldurmak, soruları çözmek dışında bir anlam taşımamaktadır. Öğretmene düşen görev ise "kitap kılavuzluğu"na indirgenmektedir. Arada da varsa yanlışları düzeltene…

"Olması gereken nedir" sorusunun yanıtı "öğretmen kılavuz kitabı"ndan bağımsız düşünülemez. "Öğretmen kılavuz kitabı"nın olduğu koşullarda, öğrenci için ders kitabı "özlü çıkarım, yineleme ve pekiştirme" amacını içermelidir. Açarsak; 1) öğrenci ders kitabında varılan sonuçları ve uygulamalarını görmeli, 2) Uygun sorularla öğrendiklerini yinelemeli, sınamalı ve pekiştirmelidir.

ÖĞRETİM ORTAMLARI ve İLETİŞİM TEKNOLOJİLERİ

Eğitim ortamı ile öğretim ortamı kavramları iç içe ama farklı kavramlar. Eğitim ortamı bahçesi, laboratuvarları, salonları… ile genel olarak okul ortamını, öğretim ortamı ise dersin işlendiği dersliği, derslikteki araç gereci kapsayan bir kavram. Genel olarak da matematik öğretimi için öğretim ortamı derslikle sınırlıdır. Bu doğaldır da. Çünkü matematik kavramsal bilgi alanıdır. Deney ya da gözlem çok ön planda değildir. Ancak son zamanlarda bazı okullar matematik sınıfları oluşturmaya başladı. Bu sınıf ya da sınıflarda, bazı deneysel-görsel malzemeler, bazı matematiksel araç-gereçler, afişler, grafikler, oyun araçlarının olduğunu gördüm. Gerçi bu uygulamalar daha çok lise öncesi sınıflar için oluşturulmuştu. Ama liseler için de benzer uygulama yararlı olacaktır. Matematik sınıflarının pratik yararı bir yana, ders motivasyonu için bile yararı olacaktır. Matematik solunan bir ortam öğretimi olumlu yönde etkileyecektir. Örneğin Eskişehir Anadolu Üniversitesi'nin "Matematik Noktası" adlı sergisini gezmek öğrencilerde olumlu etkiler yaratmaktadır. Elbette okullarda olabilecek matematik sınıfları, profesyonelce yaratılmış bu sergi gibi olmayacaktır. Bu sınıflarda birkaç deneyin, afişin, matematik kitaplığının olması, öğrenci projelerinin sergilenmesi bile amaç için yeterli olacaktır.

Günümüzde teknolojinin dur durak bilmez bir gelişimi var. İnsan yaşamını kolaylaştırıyor. Elbette eğitimi güçlendirmek, bilgiye ulaşmak için de çok yararlı bir araç. Ciddi biçimde yararlanılmalı. Ama vurguladığımız gibi bir araç olarak… Teknolojinin gücüne bağlı olarak öğretim programlarında sürekli yinelenen bir yönlendirme yapılıyor: "Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır." Haklı bir yönlendirme. Ancak nasıl olacağı net değil. Bu yönlendirme sonucunda birçok öğretmen internette anlatacağı konu ile ilgili görsel dokümanlara yöneliyor. Genel olarak bu da iyi bir şey. Ama iki noktaya dikkat etmek gerek. Birincisi ulaşılan bilginin sağlıklı olup olmadığı. Çünkü internet yalan yanlış bilgilerle dolu. Ayırt edebilmek çok da kolay değil. İkincisi teknolojiyi kullanma biçimi.

Giderek ders işleme teknoloji aktarımına dönme eğiliminde. “Öğrenci bakar - bilgisayar anlatır - öğretmen tuşlara basar”… Bu sakıncalar nedeniyle bilgi ve iletişim teknolojilerinin nasıl kullanılacağı ve hangi kaynaklara başvurulacağı konusunda yönlendirici olunmalı.

ÖĞRETMEN YETİŞTİRME

Sakarya Üniversitesi’nde öğretim görevlisi olan Azeri Hoca İsmihan Yusubov şöyle diyor:

> Ünlü İngiliz yazar Bernard Show’a atfedilen bir söz vardır; “Bir işi yapabilen işini yapar, yapamayan bu işin nasıl yapıldığını anlatır, her iki olanaktan yoksun olanlar ise bu işin yapılmasının nasıl anlatılacağı ile uğraşır.” Elbette burada gerçeklik payı vardır ve bu olay özellikle sporda bariz bir şekilde ortaya çıkar. (Aktif spor yapanlar, antrenörler ve yorumcular) (İsmihan Yusubov, *Matematik Güzeldir -Anlamanın Sevinci ve Kederi,* Bilim ve Gelecek Kitaplığı, s. 75)

İşini yapamayanların çok ve belirleyici olduğu koşullarda “öğretmen yetiştirme” hiç de kolay değil. İletişimin hızla yaygınlaştığı, bilgiye ulaşmanın kolaylaştığı, söylemenin bir sorumluluk gerektirmediği, öğretmenliğin sıradanlaştırıldığı, okullarda başarı ölçüsünün soru çözmeye indirgendiği… koşullarda gerçekten zor. Sorumsuz bir tavırla öğretmen yetiştiren kurumlara bir sürü eleştiri sıralayabiliriz. Yapmak kolaymış gibi!

Öğretmen akademik yönden iyi yetişmeli. “Anlatacağı kadarını bilmek” öğretmene yetmez. Eğer ders kitaplarını aktarana dönüşmesini istemiyorsak... Akademik donanım matematik bilgisiyle de sınırlı olarak düşünülemez. Öğretmen matematik kültürü ve matematiksel düşünüş yönüyle de iyi yetişmelidir. Ancak o zaman “matematik ne işime yarayacak” sorusu karşısında donanımlı ve güven verici olur. Yoksa “sular seller gibi soru çözen” olmanın ötesine geçemez.

Öğretmen mesleki yönden iyi yetişmeli. “Öğrencinin annesinden, babasından iyi olmak” öğretmene yetmez. Öğrenciyi yalıtılmış ortamda tanımak da öğretmene yetmez. Onu çevrenin bir unsuru olarak tanımalı ve anlamalı. Ancak o zaman değişen

toplumsal koşullar içinde öğrencideki farkı görür, davranış geliştirebilir.

Öğretmen toplumsal sorumluluk yönüyle iyi yetişmeli. "İyi yetişmek" de yetmez. Değiştirme isteğini içinde duymalıdır. Bu saptama belki de yaşadığımız koşulların en önemli saptaması. Değiştirme duygusunu içinde taşımayan öğretmen, matematik disiplininin özü sayılabilecek "uslamlama" tavrını nasıl geliştirecek? Yukarıda da değindiğimiz gibi "bilgi aktaran" olmakla sınırlı bir öğretmenin liderliği hangi ölçüde gerçekleşebilir?

Öğretmen "nasıl olmalı" sorusuna yanıt olarak birçok şey sıralanabilir. Donanımlı olmak, güvenilir olmak, özgürlükçü olmak, ilkeli olmak… gibi. Ancak bunlar ve daha fazlası abartılarak hep söylenir. Söylemek pek de önemli değil. Önemli olan söylenenlerin slogan seviyesinde kalmayıp, yaşamsal değere sahip olması. Düğüm; "işini yapan" olmak için "iyi yetişmek"te. Aslında hiç de zor değil! Akademik ve mesleki olarak yetkin olacak biçimde yetişen öğretmene bir de "değiştirme gücü"ne sahip olmayı ekleyin yeter! Ve olanaklar ölçüsünde şu öğretmen yetiştiren kurumlarda, "geçer not" alarak diploma vermek anlayışını değiştirin.

-VIII-
UYGULAMADA MATEMATİK

Bu bölüm matematik öğretiminde (özellikle lise düzeyi) vurgulanması gereken konu ve anlatımlara ayrıldı. Elbette şu ana kadar açmaya çalıştığımız matematik anlayışı yol gösterici olacak. Bunu yaparken lise matematiği konu sıralamasını da gözetmeyeceğiz. Bunu yapmak başka bir şey… Konu dizinine bağlı kalmak ders kitabı yazmak gibi olur. İlkemiz bugüne kadarki deneylere dayanarak matematiğin; 1) doğurganlık (canlı matematik), 2) transfer gücü (esnek matematik), 3) genelleme (yararlı matematik) özelliklerini öne çıkarmak olacaktır. Zaten matematik öğretimi ile sorunlar tartışılırken de bu özellikler üzerinden tartışmalar yapılıyor.

Cemal Yıldırım *Matematiksel Düşünme* adlı kitabının "Matematik Eğitimi" bölümünde, İkinci Dünya Savaşından sonra "yeni matematik" adıyla yapılan reform hareketinde göz önünde bulundurulan bazı özelliklerden söz etmektedir. Bunları temel alıntılarla aktaralım:

> (a) Derste geçen kavram ve ilişkiler, özellikle ilk yıllarda, somut örnek ve düzenlemelerden yararlanarak öğrencinin deneyimi üzerinde kurulmalı, onda sezgisel anlam oluştur-

> malıdır… (b) Öğrenme giderek somut deneyim ve işlemlerden soyut düşünmeye, öğrenilenleri simgesel olarak dile getirmeye yönelmeli, deneyim bağlamında kavram ve ilişkilerin, o bağlamla sınırlı kalmadığı gösterilmeli, genelleme yolu açılmalıdır… (c) Matematik doğruluğu söz götürmez, gözü kapalı öğrenilmesi gereken birtakım kural, işlem ve teoremler yumağı olarak değil, her noktası tartışmaya açık, doğruları irdelenebilen bir çalışma olarak işlenmeli; öğrenci bilineni irdeleme, yeni çözümler arama, yeni ilişkiler bulma etkinliği içine girme fırsatı bulmalıdır. Öğrenci ancak öyle bir etkinlik içinde matematiği benimser, anlayarak öğrenir. (d) Öğretimde yaklaşım çok önemlidir… İyi bir yaklaşım, ele alınan her konunun matematiğin bütünlüğü içindeki yeri gösterilerek, kavram ve ilkelerine açıklık kazandıracak biçimde işlenmesini gerektirir… Özellikle üst düzey öğretimde matematiğin uygulamalı işlevi yanı sıra, kuramsal niteliği göz önünde tutulmalıdır. (Cemal Yıldırım, *Matematiksel Düşünme*, Remzi Kitabevi, s. 152-153)

Cemal Yıldırım yazının devamında da öğretmen yetiştirme ve okullarda rehberlik hizmetlerinden söz etmektedir. Alıntıdaki saptamaları epey tartıştık. Öğretmen yetiştirme ve rehberlik hizmetlerinin önemini de vurguladık. Hatta yine Cemal Hoca'nın aynı kitaptan "… Çağımızın seçkin matematikçilerinden G. Polya 'buluş sanatı'ndan söz etmekte, bu sanatın bir yöntem olarak matematik öğretiminde kullanılabileceğini savunmaktadır. Ona göre matematik. Bir yığın hazır bilgi değil, çocuğun arayışına açık bir problem çözme etkinliğidir." (s. 157) söylemine uygun olarak, soru çözmenin önemi üzerinde de durduk.

Şimdi bu önemli saptamaları deneylerle birleştirerek ayrıntılı olarak inceleyelim. İlk ele alacağımız saptama, son sözünü ettiğimiz problem çözme olsun.

PROBLEM ÇÖZME

Problem çözme ile ilgili önemli araştırmaları olan Georgia Polya'nın (1887-1985) "matematik, … çocuğun arayışına açık bir problem çözme etkinliğidir" söylemine uygun olarak bölüm başlığını problem çözme olarak yazdım. Bizde uygulanan

programa göre Polya'nın sözünü ettiği problem çözmeyi "soru çözme" olarak ele aldık. Soru çözme, kullandığımız biçimiyle problem çözmeden daha genel bir anlam ifade etmektedir. Bizim yaygın kullandığımız problem çözme, kurum giriş sınavlarında (SBS, Üniversiteye giriş…) çokça karşımıza çıkan problemler. Hani şu havuz problemi, iş problemi, yüzde-faiz problemi vb. diye kategorilere ayrılan problemler…

Önce bu kategorize etmenin saçmalığı üzerinde duralım. Bilim ve Gelecek Kitaplığı'ndan çıkan *Matematik Yaramazdır* adlı kitabımda da bu konuyu ele almıştım. Orada art arda şöyle problemler sıralamıştım.

1) Bir musluk bir havuzu 6 saatte dolduruyor. Diğer musluk aynı havuzu 8 saatte dolduruyor. Havuz boş iken iki musluk birden açılıyor. Havuz kaç saatte dolar?

2) Bir işçi bir işi 6 günde ikinci işçi aynı işi 8 günde yapıyor. İkisi birlikte bu işi kaç günde yapar?

3) Bir araç bir yolu 6 saatte, diğer araç aynı yolu 8 saatte alıyor. Bu yolda karşılıklı hareket eden iki araç kaç saat sonra karşılaşır?

Kitapta her soruyu yazdıktan sonra üşenmeyip altlarına ayrı ayrı çözümlerini yapmıştım. Çözüm hepsinde;

$\frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ ile yapılıyordu. Sabırla açıklamalarını da yapmıştım. "$\frac{1}{x}$" birinde havuzun bir saatte dolan kısmını diğerinde bir günde yapılan iş miktarını öbüründe bir saatte alınan yol miktarını gösteriyor $\frac{1}{6}$ ile $\frac{1}{8}$ birim zamanlardaki miktarları.

Bu ve başka örneklerle problemleri "pratik çözüm", "pratik öğrenme" adına kategorilere ayırmanın anlamsızlığını vurgulamıştım. O gün anlamsızlık olarak ifade ettiğim bu eleştiriyi, bugün daha ileri götürüyorum. Buna "matematik öğretimi"nin sefaleti diyorum. Çünkü aynı problemleri lise öğrencileri böyle çözerken, ilköğretim öğrencileri, "$\frac{1}{6}$ ile $\frac{1}{8}$'i toplar paydayı paya bölerim"

diyerek çözüyordu! Niçin topladın ve paydayı paya böldün sorusunun yanıtını bilmeden…

Sınavlara hazırlığın matematiği örselemesinin bir başka örneğini de yine üniversite sınavlarına hazırlık döneminde yaşadım. Eski yıllarda kenar sayısı "*n*" ile gösterilen çokgenin köşegen sayısını veren "*n*.(*n*–3)/2" formülünü vermezdik. Kitaplarda olmadığı gibi ben de ezbere bilmiyordum. Bir sınavda sordular; "10 kenarlı çokgenin kaç köşegeni vardır" gibi. Kalıplarla ve "pratik öğrenme" mertebesine ulaşmamış birçok öğrenci, "biz bunu görmedik" diye soruyu çözmek için uğraşmadı bile. Anlamlı öğrenenler ise anlık çıkarımlarla soruyu çözdüler. Bazı öğrenciler: "Bir köşeden kendisine ve iki komşu köşe dışında 10–3 = 7 köşegen vardır 10 ayrı köşeden 10.7 = 70 köşegen çizilir. Ama her köşegen ikişer kez sayıldığı için ikiye bölünerek 70/2 = 35 köşegen bulunur" diye, bazıları da "herhangi üç nokta doğrusal olamayacağı için 10 noktanın her iki noktasının oluşturduğu doğru parçaları 10'un 2'li kombinasyonları olarak C(10,2) = 45 bulunur, bunun 10 tanesi kenar olduğu için, köşegen sayısı 45–10 = 35 tanedir" biçiminde çözmüştü. Her iki çözümde de; soruyu doğru anlama, köşegen, kenar gibi kavramların farkını bilme, sezgiyi akıl yürütmeyle birleştirme gibi matematiksel özellikler kullanılmıştı. Daha ne olsun? Çözemeyenlerle çözenler arasındaki fark; "yüzeysel ve geçici öğrenme" ile "derin ve kalıcı" öğrenme arasındaki farktı.

Her dershanede özel sınıf adıyla sınıflar oluşturulur. Bu sınıfın öğrencileri başarı seviyesi yüksek, Türkiye derecesi yapmaya aday öğrencilerdir. 11 kişilik böyle bir sınıfta bir öğrencim diğer 10 öğrenciden oldukça farklıydı. Sorduğum soruyu tüm öğrenciler yazar yazmaz hızla çözmeye başlarlardı. O öğrenci ise sakince kalemi sıraya bırakır, elini çenesine dayar kısa süre düşünür ve kalemi alıp soruyu çözer bana bakıp tamamdır işareti verirdi. Ve neredeyse her zaman ilk çözen o olurdu. Bir konuşma sırasında "nasıl soru çözüyorsunuz" sorusuna şu yanıtı vermişti: "Ben sorunun bende neyi ölçmeye çalıştığını düşünüyor, sonra hangi adımları atmam gerektiğine karar verip soruyu çözüyorum." Onun bu söylemi arkadaşlarını benim söylememden daha çok

etkiledi. Öğrencinin belirlediği soru çözme stratejisini ben mi öğretmiştim? Hiç sanmıyorum. Ben belirlesem diğer öğrenciler de aynı yöntemle soru çözmeye başlardı.

Başka bir yıl yine bir özel sınıf grubu. Sanırım yine 8-10 öğrenci var. Biri dışında tümü bir iki yıldır sınavlara hazırlanıyor. O bir öğrencinin ise bugüne dek bir çalışması yok. O nedenle ön öğrenmeler yönüyle diğerlerinden oldukça geri ve soruyu en geç çözen o. Bir ara yanıma gelip "ben bu sınıftan ayrılsam mı" diye sordu. "Hayır devam et" diye yanıtladım. Diğer öğrencilerin önceden bildiği, onunsa yeni öğrendiği her bilgiyi not ederek devam etti. Her öğrendiğini kendi için anlamlı hale getiriyordu. Son bir aya gelindiğinde diğer öğrenciler seviyesine geldi. Sınavda da Türkiye çapında ilk yirmiye girdi. Sabır ve istikrarlı tutum ona başarıyı getirmişti.

Birinci örnek soru çözmede sezgi ve kurguya güzel bir örnek, ikincisi ise öğrenme basamaklarını kendini tanıyarak kullanmaya güzel bir örnek. Bu iki örneğin gösterdiği bir başka şey bu öğrencilerin aldığı rehberlik hizmetinin yeterliliğiydi. Bu hizmetin kaynağı öğretmen mi, öğrencilerin okudukları okullar mı, devam ettikleri dershane mi, yoksa kendi yaratıları mı bilmiyorum. Ama yukarıda sözü edilen ve ne yazık ki piyasa koşullarına göre biçimlenen rehberlik hizmetleri fabrikasyon imalatı olarak "çok soru çöz" ötesine pek taşınmaz. Öğrencinin öğrenme yetisi, öğrenme alışkanlığı, bilgi birikimi pek gözetilmez. Bu nedenle bazen sorarım kendime, "Başarılı öğrenciler bizlere direndikleri için mi başarılı" diye. Çünkü "çözülmesin" diye hazırlanan sorularla bu öğrencileri eğitiyoruz! Ya da daha önce örneklediğimiz gibi ilginç olsun diye saçmalanan problemlerle.

Sökülüp masa üzerine dağınık bir şekilde konulmuş makine parçaları gibidir problem. Öğrenci bu parçalara bütünlüklü bakacak, ne olabileceğini sezecek, hangi parçadan başlayıp hangisiyle devam edeceğine karar verecek ve adım adım parçaları birleştirecek. Sorunun kolaylığı ve zorluğu kullanılan makinenin karmaşıklığına bağlı. Karmaşık olanlar değişkenlere gereksinim yaratabilir. Yani "x"e, "a"ya. Lise düzeyinde istenen de budur. Yani karmaşık soruların çözümü için denklem kullanmak. An-

cak denklem kurmanın zorunluluk durumunda başvurulacak yöntem olduğu da unutulmamalı. Açıklaması yeterli bir çözüme "hayır denklem kurarak çözmeliydin" deme hakkımız olmamalı. Hele hele problem kurarken makinenin parçalarından birini yan odadaki yatağın altına saklamak hiç olmaması gereken davranış. Yapılıyor mu denilirse… Evet yapılıyor. Parçayı klozete atıp sifonu çekme tipinde örnekler bile sıralanabilir.

SORU ÇÖZMEK

Polya'nın problem çözme dediği etkinliği genel anlamda soru çözme biçiminde biraz ayrıntılı ele alalım. Yani bir havuz, iş… problemi çözme ötesinde bir denklemi çözmek, bir geometri sorusunu çözmek ya da bir limit sorusunu çözmek gibi… Çünkü matematik soru çözme ile başlar, soru çözerek biter. Hatta amaç yönüyle bakıldığında "soru çözme" , "sorun çözme" davranışını hedefler. Matematiğin temel amaçlarından biri olma işlevselliğiyle.

Soru çözme, bir konunun öğrenilme sürecinin her aşaması için kullanılan etkinliktir. Daha önce ön hazırlık için uygun durumlarda ödev olarak hazırlanmış soru örneği verdik. Hangi amaçla ve hangi hedeflerle hazırlanması gerektiğini tartıştık. Ders etkinliği sürecinde üç aşamada da soru sorma ve soru çözme etkinliği vazgeçilmez önemdedir. Birincisi yeni konuya başlarken çözülecek hazırlık sorusu, ikincisi konuyu kavrama aşamasında sorulacak pekiştirme sorusu, üçüncüsü ölçme amaçlı değerlendirme sorusu. Soru sormak öğrenmenin temel adımıdır. Ancak öğrenciyi soru sormaya teşvik etmek yetmez. Soru hazırlamaya da teşvik edilmelidir. Öğrencilerle birlikte soru hazırlama, öğrencilere soru hazırlatma ve ham sorular üzerinde çalışma, konuyu kavrama ve öğrenci aktivitesi yönüyle çok verimli bir çalışmadır.

Sık sık öğrencinin sorduğu sorularla karşılaşırız. Bu iyi bir durumdur. Ancak bu soruları çözmek, makinenin vidasını sıkmaktan öte bir anlam taşır. Soru çözme etkinliği için önemli olan iki etkinlik: 1) Sorunun neden sorulduğunu bilmek, 2) nasıl çözüleceğini bilmektir.

Sorunun neden sorulduğunu bilmek

Sorular dersi işlemenin gidişatını belirler ve konuyu kavramanın köşe taşlarıdır. Sorulara doyurucu yanıtlar vermek de bir o kadar önemlidir. Bu da sorunun neden sorulduğunu bilmeye bağlıdır.

Genellikle iki tür soru soran öğrenci vardır. Birincisi, ilgili meraklı ve konu hakkında derinleşmek isteyen öğrenci. İkincisi, anlatılanı "anlamayan" öğrenci. Derinleşmek isteyen öğrencinin sorusu sınıf seviyesine uygunsa sınıfta, değilse sınıf dışında yanıtlanmalı.

Anlamadığı için soran öğrencinin sorusu ise sorma nedeni doğru anlaşıldıktan sonra yanıtlanmalıdır.

Öğrencinin soruyu; a) Dersi iyi dinlemediği için mi, b) Alt bilgileri yetersiz olduğu için mi, c) İyi anlatamadığımız için mi sorduğu anlaşılmalı, ona göre yanıt verilmelidir. Sorunun neden sorulduğunu bilmeden, anlatılanı bir kez daha anlatmak çoğu kez doyurucu değildir.

Soru çözmeyi öğretmek

"Anlıyorum ama soruları çözemiyorum" yakınmasının bir önemli nedeni öğrencinin "soru çözme" becerisinin yetersizliğidir. Bu nedenle sınıfta "soru çözme" çalışmaları yapılmalı ve önemsenmelidir. Bu çalışma kesinlikle boşa harcanan zaman değildir.

Kabaca ve sıralı olarak; 1) Soruyu iyi okumak ve anlamak, 2) Gerekiyorsa şekil çizmek veya model oluşturmak, 3) Verileri ve isteneni (varsa) şekil üzerinde göstermek, 4) Sorunun neyi ölçmek istediğini sezmek, 5) "Ne isteniyor"dan başlayıp, "bunun için neyi bulmalıyım"la devam etmek… gibi.

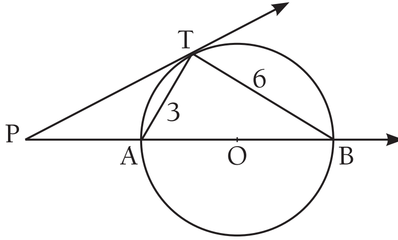
Bir de Cahit Arf'ın dediği gibi, soruda değişmezler vardır. "Öncelikle değişmezleri saptamak ve değişmezden hareketle soruya yaklaşmak gerekir" ilkesinin öğrenciye kavratılması gerekir. Örnek bir soruyla tartışalım.

Soru: Bir çembere dışındaki bir noktadan bir teğet bir de çemberin çapını içeren kesen çiziliyor. Teğetin değme noktasının çapın uçlarına olan uzaklıkları 3 cm ve 6 cm ise teğet parçasının uzunluğu kaç cm'dir?

Çözüm:

1) Soruyu çözmek için şekil çizmek gerektiği açık. Ancak soru doğru anlaşılmaz ise çizim de doğru yapılamaz.

2) Bir çember ve dışında bir P noktası alalım. P'den bir PT teğeti ve [AB] çap olmak üzere PAB keseni çizelim.



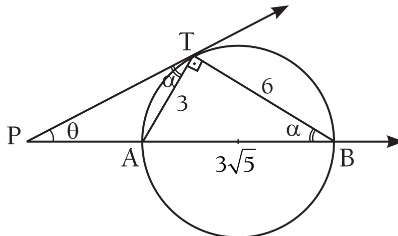
3) $|TA| = 3$ cm ve $|TB| = 6$ cm verilerini şekil üzerinde gösterelim.

4) • Şekil çizildikten sonra istenen $|PT|$ uzunluğu ile ilgili ilk akla gelen kuvvet kavramıdır. Yani; "$|PT|^2 = |PA|.|PB|$" bağıntısı. Ancak $|PA|$ da $|PB|$ de uzunluk olarak belli değil. Bunlar bilinmeden $|PT|$'ye ulaşmak olanaklı değil.

• Tekrar şekle dönüldüğünde "$|AB|$'nin çap olması anlamlı mı" sorusu ile $\widehat{ATB}$ açısının 90° olduğu görülür. Buradan da Pisagor Bağıntısı ile ($|AB|^2 = 3^2+6^2$'den) $|AB| = 3\sqrt{5}$ bulunur.

• Ancak bu da sonuca gitmek için yeterli değil... İç içe üçgenler daha önceki deneylerimize bağlı olarak "benzer üçgenler" olabileceği sezgisini ortaya çıkarır. Benzer üçgenlerin olabilmesi için de "eşit açılı üçgenler" olmalıdır.

• Bu kez "çemberde açı tanımlamaları" gözden geçirilerek; $\overset{\frown}{TA}$ yayını ayıran "$\widehat{PTA}$ kiriş teğet açısı" ile $\overset{\frown}{TA}$ yayını gören $\widehat{PBT}$ çember açısının eşit olduğu görülür.



• $m(\hat{P}) = \theta$ ortak açı olduğundan; PTA üçgeni ile PBT üçgenleri benzerdir.

• "$\frac{|PA|}{|PT|} = \frac{|PT|}{|PB|} = \frac{|TA|}{|TB|}$" benzerlik bağıntısı yazılarak işlemler sonucunda; "$|PT| = 2\sqrt{5}$ cm" sonucu bulunur.

Görüldüğü gibi; soruyu anlamak, şekli çizmek, temel bilgileri bilmek, sezgiyi kullanmak ve de kendimizi yönlendirecek soruları sormak adımlarından birini bile kullanmazsak soruyu çözmek olanaksızdır.

Sorunun işlevselliği

Diyelim ki lise grubunda "Karmaşık Sayılar" konusunu işleyeceğiz. Konuya bir soru ile başlamakta yarar var. Örneğin, "**$x^2 – 2x + 5 = 0$ denklemini çözünüz**" sorusu ile.

İlk tepki genellikle öğrenci diliyle "ne alâka" biçiminde olur. Alâkasız görünen sorularla başlamanın ne anlama geldiğini bilen öğrencilerin tepkisi ise "dur bakalım yine bir şey gelecek" türündedir. "Ne alâka" merakıyla çözüme geçip diskriminant değerine bakanlar $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde diskiriminantı ($\Delta = b^2 – 4ac$) inceler, $\Delta = (–2)^2 – 4.1.5$ den $\Delta = –16$ bulur ve "çözüm yok" ya da "boş küme" yanıtını verir.

Uyarırsınız; "denklemi reel sayılar kümesinde çözünüz demedim!" Çaresiz ve isteksiz devam ederler denklemin köklerini bulmak için

$X_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \mp \sqrt{-16}}{2.1}$'de, ($\sqrt{-16} = \sqrt{16.(-1)} = 4.\sqrt{-1}$)'i kullanarak;

$X_{1,2} = \frac{2 \mp 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{2.(1 \mp 2\sqrt{-1})}{2}$'de 2'leri sadeleştirp

$X_{1,2} = 1 \mp 2\sqrt{-1}$ sonucuna ulaşırlar.

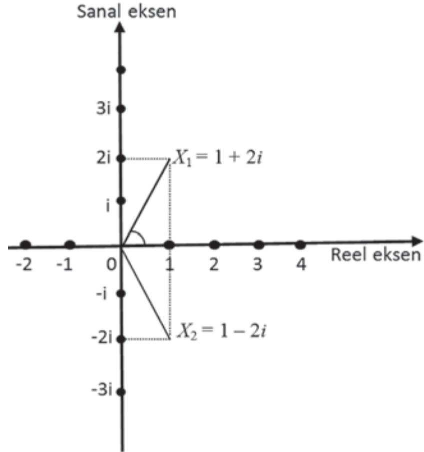
Bu sayılar konusuna anlamlı giriş aşamasıdır. Bu aşamada karmaşık sayıların bulunuşunun matematikte yaşanan buna-

lımlardan birini ortadan kaldırdığından ve karmaşık sayıların tarihçesinden söz edilebilir. Elbette bu keşfin sağladığı yararlardan da.

Girişten sonraki aşama, konunun ayrıntılarını öğrenme ve genellemelere ulaşma aşamasıdır ki bu girişten sonra bu aşama kolay bir seyre girecektir.

Soruyu yeni sorularla besleyerek kışkırtmalara devam edebiliriz. Bulduğumuz kökler $X_1 = 1+2i$ ve $X_2 = 1-2i$ 'ye dönüştü. Şimdiye dek çözülen denklemlerin çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterebiliyorduk. Bu yeni tip sayıları sayı doğrusu üzerinde gösteremeyeceğimiz açık. Çünkü iki bileşeni var. Öyleyse bu sayılar ancak düzlemde görüntü bulur.

Karmaşık düzlem dediğimiz bu düzlem çizilerek X_1 ve X_2 karmaşık sayıları gösterildikten başka; karmaşık sayının eşleniği, karmaşık sayının mutlak değeri (orijine olan uzaklığı), karmaşık sayının argümenti (büyüklüğün reel eksenle pozitif yönde yaptığı açı), bu açıya ve karmaşık sayıya bağlı olarak karmaşık sayının trigonometrik (kutupsal) biçimde yazımı kolaylıkla kavratılabilir.



Daha sonra yapılacak olan “$z = x+yi$” biçiminde gösterilen karmaşık sayıyı karmaşık düzlemde göstermek ve uygulama sonuçlarını genellemektir.

Duralım ve değerlendirelim.

Kazançlarımız: 1) İkinci dereceden denklem çözümünü anımsadık, 2) Denklem çözümünün tanımlı olan kümede yapılması gerektiğini yineledik, 3) En geniş sayı kümesine ulaştık, 4) Karmaşık sayıyı kavram olarak ve nesneleriyle kavradık, 5) Karmaşık sayı ile trigonometri arasındaki transferi gördük. Yani kısaca hem ön öğrenmeleri pekiştirmek hem de

yeni bir kavrama ulaşmak anlamında bütünlüklü bir öğrenme gerçekleştirdik. Bu işleyişe belki şöyle bir eleştiri gelebilir: “Karmaşık sayıyı trigonometrik biçimde yazmayı bu aşamada ele almak” kavrayışı zorlaştırmaz mı? Hayır zorlaştırmıyor. Hiçbir seviye grubunda böyle bir sorunla karşılaşmadım. Kaldı ki zorlukla karşılaşılsa bile, kısa bir temel trigonometrik bilgi hatırlatması yeterli olacaktır. Ayrıca trigonometrinin bir başka konu içinde kullanılması bilgi transferi anlamında da yarar sağlayacaktır. Hani öğrencinin “bunlar ne işime yarayacak” tepkisinden yakınırız ya! “İşte işe yarıyor” deme şansımız olacaktır…

Yazdıklarımız bir şeyi daha hatırlamamızı sağlıyor sanırım: “Sorunun amaca uygun seçilmesi” ciddi bir öneme sahiptir. Sorunun niteliği bir anlamda bu uygunlukta aranmalıdır.

Yukarıda konuya girişte seçtiğimiz soru ve bu soruya bağlı olarak kazanımlarımızı örnekledik. Genel olarak söylersek, kavram düzeyinde iyi bir giriş konunun ayrıntılı kavranışına zemin hazırlayacaktır. Bu zemin oluştuğunda karmaşık sayıların toplanması, çıkarılması, çarpılması gibi işlemlerinin anlatılması bile gerekmeyecektir. Uygulamalar genellikle yeterli olmaktadır. Bir tek karmaşık sayılarda bölme işlemi tereddüt yaratabilir.

Onun önünü açmak için de $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ türünden paydayı rasyonel yapma biçiminde bir ön soru yararlı olacaktır.

Öğrenme aşamasının bazı soruları hem alt başlıkların birebir öğrenilmesine ve pekiştirilmesine yönelik olmalı hem de ön öğrenmelerle konunun bağını kurabilecek sorular biçiminde olmalıdır. Örneğin “$(2-3i).(4+i)$” çarpımını yapıp, “$11-10i$” sonucunu bulduktan sonra, “kökler toplamı “$6-2i$”, kökler çarpımı “$11-10i$” olan ikinci dereceden denklemi kurunuz” gibi.

Konu işlenişi bittikten sonra sorulacak sorular ise değerlendirme hedefli sorular olmalıdır. Bu sorular iki amacı gerçekleştirmelidir. Birincisi alt başlıkların öğrenilip öğrenilmediğini ölçmeli, ikincisi konunun bütünlüklü öğrenilip öğrenilmediğini.

Bütünlüklü öğrenmeden ne anlaşılması gerektiği sorusunu da iki soru ile açmak gerekir sanırım. Birinci soru: "Öğrenci konunun alt başlıkları arasında anlamlı bağ kurabiliyor mu?" Örneğin karmaşık düzlemde genel olarak iki bileşenle gösterilen sayının, eksenler üzerinde neden reel sayılar gibi tek bileşenli gösterildiğinin farkında mı? İkinci soru: "Öğrenci, konular arasında anlamlı bağlar kurabiliyor mu? Örneğin reel sayı işlemlerinde gördüğü sayıların mutlak değeri ile karmaşık sayının mutlak değerinin aynı içeriği taşıdığının farkında mı?

Bu farkındalık öğretmeni "bunlar hayatta benim ne işime yarayacak" sorusu karşısında daha güçlü kılacaktır. Elbette örneklediğimiz karmaşık sayı konusu öğrencilerin büyük çoğunluğunun yaşam boyunca bir daha karşılaşmayacağı bir konudur. Ama bir bilginin bir başka matematik konusunda ya da başka bir bilgi alanında "ustaca kullanılabilme becerisi" tam da matematiğin temel amaçlarından biridir. Çünkü bu beceri iyi bir akıl yürütme, sorgulama ve sorun çözme etkinliğidir. Bu etkinlik doğru anlaşılır ve anlatılırsa işlenen konuların seçiminde tek kıstasın "yaşamda kullanılabilme değeri" olmadığı kavranacaktır.

GENELLEME

Bir teorem ya da bir kural ortaya konulup kanıtlandıktan sonra yaşamın birçok alanında kullanılır. Hemen olmasa bile daha sonra. Bulunanlar genel bağıntılardır ve matematiğin hedefi de genel bağıntılara ulaşmaktır. Örneğin analiz ilkelerinin bulunması ve ortaya konulması akışkanlara uygulanmış ve hareketin anlaşılması sağlanmıştır. Ya da Öklid bağıntıları… Öklid bağıntıları mühendisliğin her alanında uygulanmaktadır. Ancak yeniden anımsatalım. Matematik genellikle uygulansın diye yapılmaz. Kendi iç tutarlılığı ve iç uygulamalarıdır çoğunlukla matematikçiyi matematikle uğraştıran. Bu uğraşta da matematik genel bağıntıları özel bağıntılara, genel çözümleri özel çözümlere tercih eder.

> Şüphesiz matematiğin pratik faydaları vardır. Fakat matematik satış veya mühendislik gibi mesleklerde başarılı

> bir kariyerden daha fazlasını ifade eder. Bir matematik öğrencisinin matematiğin kuruluş yapısını takdir etmesi gerekir. Birkaç temel şeyi kafamızda tutarak altta yatan zihinsel iskelet hakkında bazı yargılara varabiliriz: Birincisi matematikçi basiti karmaşığa tercih eder. Eğer bir kural diğer ikisinin işini yapıyorsa o zaman matematikçi memnuniyetle o tek kuralı tercih eder. İkincisi, matematikçiler genel uygulaması olan kuralları ararlar. Yunan geometricisi Öklid'in önerdiği doğru tanımı gibi, bir kavram her durumda geçerli olduğunda çok daha mutlu olurlar; bir kavramın tanımı değişik türlerdeki eşitliklerde değişim gerektiriyorsa o zaman ona şüpheyle bakarlar. Üçüncüsü her matematikçi doğasında değişmez kurallara bir eğilim taşır; değişimden hoşlanmazlar… (Jefferson Hane Weaver, *Matematik Kaşifi*, çev: Bilge Sipal-Barış Akalın, Güncel Yayıncılık, s. 33)

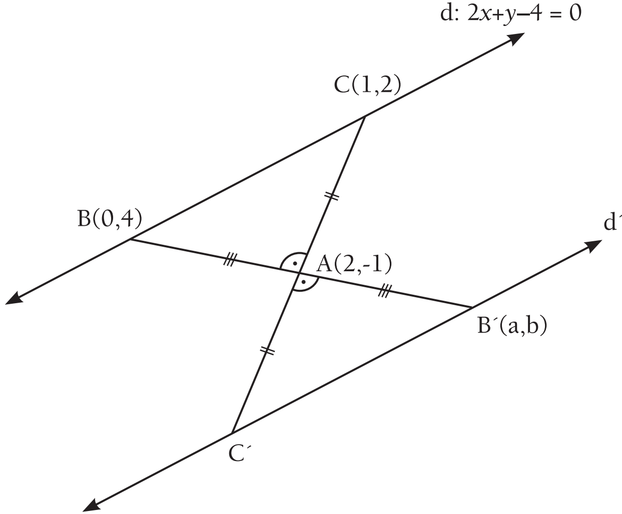
Sadece matematiğin tercihi midir "genel uygulaması olan kuralları aramak"? Çok işlevli aletleri tek işlevliye yeğlemez miyiz? Her iki ayağını da ustalıkla kullanan futbolcu tercih edilmez mi? Ya da yeni telefonları düşünelim. Hem fotoğraf makinesi, hem kamera, hem bilgisayar, radyo, televizyon… Adı bile telefon değil artık. Özetle yaşamın doğasında vardır sihirli değnek aramak. Sadece masallarda değil. Tek formülle matematiğin üstesinden gelmek saçmalığı dışında matematikte de genele yönelmek güçlü ve doğru bir eğilimdir.

Üniversiteye hazırlanan bir lise son sınıf grubunda Analitik Geometri konularını tekrar ediyoruz. 15 kadar öğrenci var ve konu hakkında bilgileri oldukça iyi. Şöyle bir soru verdim ve çözüm istedim.

Soru: $2x+y-4=0$ doğrusunun A(2, –1) noktasına göre simetriğinin denklemini yazınız.

Soru aslında üzerinde çalışacağımız türden bir soruydu ve doğrunun simetriği de bir doğrudur ön bilgisiyle taslak çizimimizi yaptık.

Birlikte çözümler ürettik.



Çözüm 1: d´, d doğrusuna paralel olacağı için (ACB ve AC´B´) üçgenlerinin eşliğinden) d´ doğrusunun eğimi d doğrusunun eğimine eşittir.

d: $2x+y-4 = 0$ denklemi $y = -2x+4$ biçiminde yazıldığında x'in katsayısı "–2" *d*'nin eğimidir. ($y = mx+n$)'den $m_d = m_{d'} = -2$ olur. Devamında "d" üzerinde bir nokta alınır. Alınan noktanın apsisi $x = 0$ seçilirse, $2.0+y-4 = 0$'dan $y = 4$ ve B(0,4) olur.

B'nin A noktasına göre simetriği B´ olsun. $|AB| = |AB'|$ olur ki, A noktası [BB´] nün orta noktası olacaktır.

$\frac{a+0}{2} = 2$ 'den a = 4, $\frac{b+4}{2} = -1$ 'den $b = -6$ ve B´(4, –6) bulunur.

Eğimi "– 2", bir noktası (4, –6) olan doğru denklemi "$y-b = m(x-a)$" dan

$y+6 = -2(x-4)$; $y+6 = -2x+8$ düzenlenerek **d´: $2x+y-2 = 0$** olarak bulunur.

Çözüm 2: Çözüm 1'de olduğu gibi d´ ve d doğruları paralel olduğundan eğimleri eşittir. x ve y'nin katsayıları aynı olduğu için

d´: $2x+y+k = 0$ olacaktır. Birinci çözümde bulduğumuz B´(4, –6) d´ denkleminde uygulanarak, 2.4+(–6)+k = 0 dan “k=–2” bulunur. Bulunan değer denklemde k yerine konulduğunda **d´: 2x+y–2 = 0** olur.

Çözüm 3: d doğrusu üzerinde B’den başka bir C noktası alınır. Örneğin C noktasının apsisi $x = 1$ olsun. $2x+y-4 = 0$ da x yerine 1 konulursa, $2.1+y-4 = 0$ dan $y = 2$ bulunur. C’nin A’ya göre simetriği “C’” olmak üzere |AC| = |AC´| den C´ noktası C´(3, –4) olarak bulunur.

İki noktası bilinen doğrunun eğimi [$m = (y_1-y_2)/(x_1-x_2)$] kullanılarak $m = (-4+6)/(3-4) = -2$ olur.

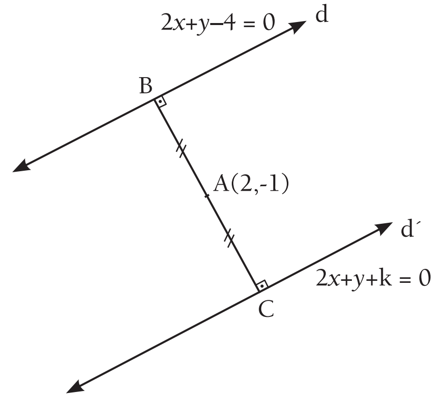
Eğimi “–2” ve bir noktası (4, –6) olan doğru denklemi, $y+6 = -2(x-4)$ den **2x+y–2 = 0** olarak yeniden bulunur.

Elbette B´ ve C´ noktaları bulunduktan sonra iki noktası bilinen doğru denklemi doğrudan yazılabilir.

Çözüm 4: Doğrular paralel olacağı için eğim eşitliğinden d´: $2x+y+k = 0$ olur. A(2,–1) her iki doğruya da eşit uzaklıkta olduğu için |AB| = |AC| de noktanın doğruya olan uzaklığı kullanılarak;

$$\left(\frac{|2.2-1-4|}{\sqrt{4+1}}\right)=\left(\frac{|2.2-1+k|}{\sqrt{4+1}}\right)$$

’den k bulunur ve $2x+y+k = 0$ denkleminde yerine konulur.

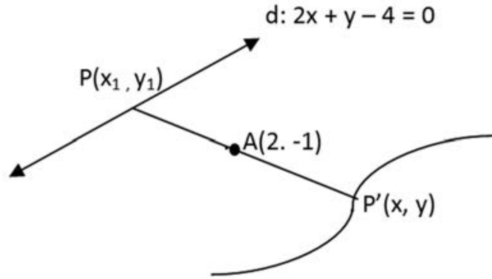


Başka çözümler yaptık mı bilmiyorum. Ama gelen her öneri tartışıldı. Bu şekilde doğru denklemlerini yazma, eğimi bulma, eğim–doğru ilişkisi, doğruların paralelliği, noktanın doğruya olan uzaklığı gibi temel ilişkileri gözden geçirdik. İyi bir pekiştirme çalışması oldu. Arkasından da yeni bir çözüm önerdim.

Çözüm 5: Birkaç çözüm arkasından yeni bir çözüm pek hoş gelmedi öğrencilere. Ama saygısızlık olmasın diye dinlediler.

Önce, "bir eğrinin bir noktaya veya doğruya ya da düzleme göre simetriğinin tek tek noktalarının birleşimi" olduğunu hatırlattım.

Ve taslak çizimi yaptık. d doğrusu üzerindeki her noktayı $P(x_1, y_1)$ ve simetriği olan eğri (çünkü bu kez simetriğin bir doğru olduğunu bilmiyoruz.) üzerindeki her noktayı $P'(x, y)$ olarak belirledik. A noktasının PP´ doğrusu için orta nokta olduğunu hatırlatıp "x_1"i x ve "y_1"i y türünden bulmalarını istedim.



$$\frac{x_1 + x}{2} = 2 \text{ den } x_1 = 4 - x \text{ ve}$$

$$\frac{y_1 + y}{2} = -1 \text{ den } y_1 = -2 - y \text{ bulundu.}$$

$2x+y-4 = 0$ denkleminin her noktasının temsilcisi olan $P(x_1, y_1)$'in, $P(x, y)$ ile değişmesi gerektiğini görmüşlerdi. Değişkenleri değiştirerek $2x+y-2 = 0$ denklemini elde ettiler.

Bu çözüm her öğrenci için yeni olmasa da pek kullanmadıkları çözümdü. Biraz uzun ve karışık gelmişti. Bir kısmının "ne gerek var" diye düşündükleri belliydi. Vurgulu biçimde şu soruyu sordum: "En avantajlı çözüm hangisi?" Sustular. Aslında yanıt belliydi. Her biri için avantajlı olan kendi çözümüydü… Süren sessizliğin ardından bir öğrenciden yanıt geldi: "En son yapılan çözüm." Soran gözler ona döndü, ben ise sordum: "Neden?" Yanıtı çok ilginçti: "Gideri çok!" Güldüm. Öğrenciler de güldü. Yanıt veren öğrenci sınıf jargonuna uymadığını düşünerek açıkladı. "Her fonksiyon için kullanılır." Çok net anlatmıştı. Ne gerek var diyenler bir kez daha incelemek gereği duymuşlardı. İnceledik. Onlara da ilginç geldi.

Ardından, değişken değiştirme, geometrik yer kavramlarını tartıştık. Taşlar yerine oturdukça güvenleri arttı. Yeni örnekler üzerinde durduk.

Gideri çok olan bu çözüm Polya'nın "matematikçi basit olanı tercih eder" saptamasıyla çelişmiyor mu? Hayır çelişmiyor…

Eğer amaç salt sorunun sonucunu bulmak olsa değişken dönüştürme zahmetine katlanmazdık. Hatta öğrencilerin yaptığı çözümler daha önemli. Öğretmen çözüm dayatmaz. Der ki "en güzel çözüm öğrencinin yaptığı çözümdür." Yeter ki 64/16'yı sadeleştirirken altıları sadeleştirip 4/1 = 4 demesin. Öğrencinin doğru çözümünde bilginin içselleşmesi, yaratıcı biçimde kullanımı vardır. Genellikle de basit ve sadedir. Öğretmenin bir kazanım hedefleyip sorduğu soruya öğrencinin verdiği yaratıcı yanıt örneklerini daha önce de verdik. Başlangıçta karmaşık gibi görünen çözümler yukarıda olduğu gibi kavrandıktan sonra öğrenci için de basit hale gelecektir. Çözümde avantajın kışkırtıcılığı ise yaratıcı-açılımcı yaklaşımı teşvik edecektir.

Aynı dersin devamında bir soru ile sabit bir noktadan geçen doğruların genel denklemini tartıştık. Yani doğru demeti denklemini… Doğru demeti denklemi yazmanın; iki bilinmeyenli birinci dereceden denklem sistemini çözme mantığına dayandığını ve bir geometrik yer uygulaması olduğunu kavrayan öğrenciler soru sormaya başladılar. "Parabol demeti var mı?" "Çember demeti de olur mu?" Aslında yazılacağını sezmişlerdi. Yazmak istiyorlardı. Yazdık elbette. Yaratıcılık sınır tanımıyordu. Yaratıcılığın güzelliği, öğrenmeyi kışkırtıyor, "bilen adam"ın güvenine dönüşüyordu.

Yaratıcılığın ve kışkırtıcılığın bir güzel örneği de geometrik yer kavramıdır. Çünkü onun da gideri çoktur! Ancak lise matematiği içinde yeterince ya da bütünlüklü bir biçimde yer almadığı da açıktır. Oysa geometrik yer kavramı, kavramsal olarak, matematik dilinin, üretici özelliğiyle estetiğin, uygulama yönüyle matematik-geometri-analitik geometri sentezinin özelliklerini içinde taşır. Daha da ötesi yaşamın akışkanlığının matematik dünyasında modellenmesinin temel unsurudur.

GEOMETRİK YER

Lise öğretim programını bitirmiş bir öğrenci grubuna şöyle bir soru sordum.

Soru: Analitik düzlemde P(a, a+5) noktalarının geometrik yer denklemini yazınız.

Soruyu defterine yazıp bitiren önce sağa sola sonra başını kaldırıp bana baktı. Birisi daha ileri gitti: "Napcaz yani?" Gençler tepkilerini sevimli bir tarzda dile getirmeyi biliyordu. Diğeri devam etti: "Soru düzgün sorulmamış." Bu benim "sorular anlaşılır düzgünlükte sorulmalıdır" söylemime nazireydi. Diyalogu sürdürdüm. "Geometrik yer kavramını hiç duymadınız mı?" Yanıt geldi: "Duyduk duymasına da böyle değil." Ben devam ettim: "Nasıl?" "Mesela bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri çemberdir gibi." Yeniden sordum. "Geometrik yer denklemini yazın denildiğinde ne anlıyorsunuz?" Aynı öğrenci, "çember denklemini yazarız." Bir diğeri onun eksiğini kapatmak ister gibi atıldı: "Hani merkez hani yarıçap nasıl yazacaksın?" Çember denklemini yazarız diyen ona takılarak, "dur be cahil, çember dediysek misal verdik, mesela dedik." Bir diğerinden de ona kinaye: "Ooo felsefe yapıyoruz. Şimdi cehalet çıkacak ortaya…"

Diyalog sıradan hatta basit görülebilir. Kendileriyle hatta benimle dalga geçer gibi davrandıkları düşünülebilir. Ama kesinlikle öyle değil. Söylemlerinin beni ve birbirlerini incitmeyeceğini biliyorlardı. Özen de gösteriyorlardı kendilerince. Sadece rahat ve özgürdüler. Geometrik yer kavramının "aynı özelliği taşıyan noktalar kümesi" olduğunu biliyorlardı. "Açının kollarına eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri açıortay doğrusudur", "bir doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bu doğruya paralel bir çift doğrudur", "bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri çemberdir" diyebiliyorlardı. Geometrik yer denklemini yazın denildiğinde de ezberledikleri denklemi yazabiliyorlardı. Doğru, çember, elips, parabol gibi. Ama en iyi de çemberi yazabiliyorlardı. Çünkü geometrik yer kavramı daha çok çember için kullanılmıştı.

Çözüm için adım attık. Analitik düzlemde P(a, a+5) noktalarını P(x, y) biçiminde genellemelerini istedim ve şunu yazdım.

$$(a, a+5) \leftrightarrow (x, y)$$

Yazınca devamı geldi. Biri "yahu aynı P bunlar" deyip devam etti: "$a = x$ olacak $a+5 = y$". Biri "tamam buldum" diye denklem yazmaya koyulurken diğeri "eşitleri anladık da şimdi ne yapacağız?" Biri kendi jargonuyla yardım etti: "Napcan? a'ları çekip eşitliycen." Bir öğrenciden yanıt geldi: "$y = x+5$." Diğerlerinden de… "Ben de buldum", "buldum", "buldum"…

Sorun "bilmemek miydi?" Bunu söylemek çok doğru değil. Parça parça bilgiler vardı. Ama bunlar bütünleşmemişti ve kullanma becerisi gelişmemişti. Eğer denklemi istenen eğri verilmişse ya da verilen tümceden çıkartabiliyorlarsa yazabiliyorlardı. Ne olduğunu anlayamadıkları denklemi yazamıyorlardı. Kısaca geometrik yer kavramının gizemli genellemesi kavranmamıştı. Bu nedenle P(a, a+5) noktalarının geometrik yer denklemi yazılamamıştı. Bir öğrenci: "Hatırladım. Biz a'ya iki değer verip iki nokta buluyor ve doğru denklemini yazıyorduk" dedi. Bu da başka bir sorundu. Aslında bu soru için söylediği doğruydu. Gerçekten de;

P(a, a+5) noktası örneğin $a = 1$ için P(1,6), $a = 2$ için P(2,7) oluyor. İki noktası bilinen doğru denklemi $y = x+5$ oluyordu. Bu çözüm öğrencilere daha kolay geliyordu. Parametrik düzenlemeyi tercih etmeyeceklerdi. Başka bir soru sordum.

Soru: P(a, a^2 +2) noktalarının geometrik yer denklemini yazınız.

Tahmin ettiğim gibi bazı öğrenciler "a" ya iki değer verip çözüm yaptılar.

1) Örneğin $a = 0$ için P(0, 2) ve $a = 1$ için P(1, 3) noktalarını bulanlar, eğimi de "$m = (3–2)/(1–0) = 1$" bulup "$y–3 = 1(x–1)$" den "$\mathbf{x–y+2 = 0}$" sonucuna ulaştılar. Elbette farklı değer verenler farklı sonuçlar bulmuştu. Tam benim düşündüğüm gibi. Bazı öğrenciler ise,

2) (a, a^2 +2) = (x, y) eşlemesinden; $a = x$ ve $a^2+2 = y$ olduğunu bulup $y = a^2+2$ de "a" yerine "x" koyarak $\mathbf{y = x^2+2}$ denk-

lemini elde ettiler. Bu sonucu bulanlar "parabolmüş" diye de eklediler.

Yanlış olanı tartıştık. Öğrenciler ikna oldu. Asıl yanlış olansa önceki öğrenmede "anlamlı öğrenme" yerine özel çözümün, bir başka deyişle "kolay çözüm"ün öne çıkarılmasıydı. Bir başka deyişle, "kolay yoldan öğretmek adına özelin genele tercih edildiği" yanlış öğrenme idi.

Sorunun "kutudan ne çıkacağının" bilinmemesi gibi sürpriz içerikli olması öğrencilere ilginç gelmişti. Yeni soru istediler. Birkaç soru daha sordum yorumlar yaptık. En ilginç geleni de:

Soru: P($\sqrt{a^2+1}$, a +2) noktalarının geometrik yer denklemiydi.

$\sqrt{a^2+1} = x$ kareler alınarak $a^2+1 = x^2$ 'den $a^2 = x^2-1$ e dönüştürüldü.

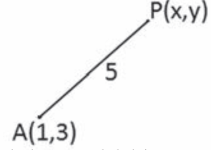
$a+2 = y$ ise önce $a = y-2$ ye ve her iki yanın karesi alınarak, $a^2 = y^2-4y+4$'e dönüştürüldü. Sonra da $a^2 = x^2-1 = y^2-4y+4$ eşitliği düzenlenerek $\mathbf{x^2-y^2+4y-5 = 0}$ denklemine ulaşıldı. Farklı bir yaklaşımla denklem; " $x=\sqrt{y^2-4y+5}$ " biçiminde de elde ediliyordu.

Bulunan sonuçlar kolaylıkla söyleyebileceğimiz fonksiyonları aşmıştı. Bunlar farklı eğrilerdi. İncelemeyi sonraya bıraktık.

Daha sonraki derslerde çember, elips, hiperbol gibi hatta uzayda doğru, düzlem, küre denklemlerinin geometrik yer kavramıyla kolaylıkla yazılabileceğini ele aldık. Yazılan denklemler anlamlı hale gelmişti. Neyi niçin yaptıklarını biliyorlardı. Tüm bu çalışmaları yaparken geometrik yer denklemini yazınız yerine zaman zaman noktalar kümesinin denklemini yazınız demeyi ihmal etmedik. Ayrıca başarılı bir sonuç elde edilmesi için ilk adımın verilen eşitliği matematiksel olarak yazmak, ikinci adımın bu eşitliği analitik geometri diline çevirmek olduğunu vurguladık. Ve örnekledik.

Örnek: A(1,3) noktasından 5 birim uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yer denklemini yazınız.

1. Adım: A(1,3) ve aranan her noktayı temsil eden P(x, y) gösterilir ve |PA| = 5 olarak matematiksel önerme yazılır.

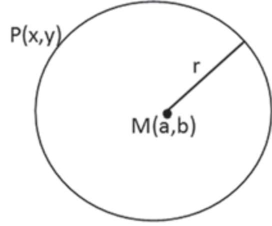


2. Adım: |PA| uzunluğu (iki nokta arasındaki uzaklık) yazılarak $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=5$ elde edilir. Her iki yanın karesi alınarak $(x-1)^2+(y-3)^2 = 5^2$ bulunur.

3. Adım: Çember denklemi olduğu yorumlanarak,

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

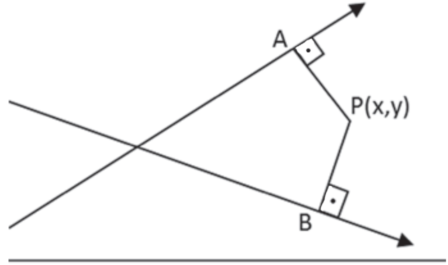
genellemesine ulaşılır.



Ya da üretilen bir soruyla,

Soru: $2x-y+4 = 0$ ile $x-2y-6 = 0$ doğrularına eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yer (açıortaylar) denklemini yazınız.

İlk adımda; taslak çizilerek verilen her noktanın temsilcisi P(x, y) noktası ile A ve B gösterilir. Verilen önerme matematiksel olarak yazılır: "|PA| = |PB|"



İkinci adımda; |PA| ve |PB| uzunluklarının noktanın doğruya olan uzaklıkları olduğu görülerek , |PA| = |PB| eşitliğinin analitik biçimi yazılır.

$$\frac{|2x-y+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|x-2y-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$ 'de paydalar sadeleştirilerek

|2x–y+4| = **|x–2y–6|** sonucu bulunur. Ama en iyisi açılımı anımsatmak için;

a) $2x-y+4 = x-2y-6$ dan $\mathbf{x+y+10 = 0}$ (aynı işaretli açılım)

b) $2x–y+4 = –x+2y+6$ dan $3x–3y–2 = 0$ (farklı işaretli açılım) denklemlerini elde etmek daha sonra da neden iki denklem ve neden bu doğruların birbirine dik olduğunu tartışmak…

Bu aşamaya dek geometrik yerin anlamı ve cazibesi üzerinde durduk. Ve bunu geometrik yer kavramının kendi iç doğurganlığı ve yaratıcı özelliğini örnekleyerek yapmaya çalıştık. Matematiksel düşünüş ilkesi yönüyle bakıldığında doğurganlık derinliğe, yaratıcılık tutarlılığa karşılık gelmektedir. Geometrik yerin cazibesinin kaynakları derinliği ve tutarlılığıdır. Ancak yetmez… Buna yararlılığı da eklemek gerekir. Özellikle öğretim aşamalarında.

Yararlılığın bir örneğini konu işleme ile ilgili olarak verelim. Lise analitik geometri konularından biri "Çemberin Analitik İncelenmesi"dir. Bu konu bütüne bakıldığında doğruyu analitik olarak inceleme sırasındaki görece katılığın kırıldığı, esnekliğin başladığı konudur. Çünkü çember düzlemde en mükemmel şekildir. Ve aynı zamanda elips, hiperbol, parabol ve daha sonra da benzer ilkelerin geliştirilmesiyle üç boyutlu uzayda cisimleri analitik olarak incelemenin alt yapısını oluşturur. Bu nedenle önemlidir ve açılımcı yaklaşım iyi kullanılmalıdır. Konuya başlarken ilk elde yaptığımız genellikle "çember denklemi"nin ne olduğunu ortaya koymaktır. Birinciyi yöntem olarak saymasak da konuya üç yöntemle başlanabilir.

Birinci yöntem:

Merkezi $M(a,b)$ yarıçapı "r" olan çemberin denklemi "$(x–a)^2+(y–b)^2 = r^2$"dir demek… Dam üstünde saksağan der gibi. Sonra kareler alınıp açılır ya da onu bile yapmadan,

"$x^2+y^2– 2ax–2by+a^2+b^2–r^2 = 0$"da

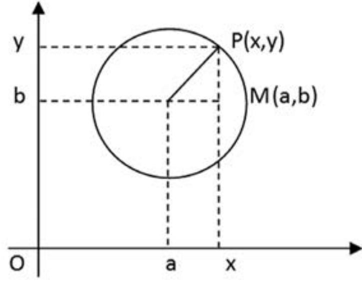
"$–2a = A, –2b = B, a^2+b^2–r^2 = C$"

yerlerine yazılarak "$x^2+y^2+Ax+By+C = 0$" elde edilir. "Bu çemberin kapalı denklemidir" ve bir de "bunlar önemlidir ha…" dedikten sonra gelsin sorular. Bir iki üç derken öğrenci homurdana homurdana ezberler. Ama bir sonraki ders görürsünüz ki; "x" miydi "y" miydi karmaşası başlar. A hangisi B hangisi, C nerede diye diye de konu biter… Bana sonuç ne diye sormayın. Bu ku-

rallı anlatımın abartılı örneği. “Bol örnek çözmek” bu anlatımın eksiğini kapatmanın çaresi!

İkinci yöntem:

Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çemberi taslak olarak çizip Pisagor bağıntısından; $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ yazmak. Burada yapılan görselliği öne çıkarıp ön bilgileri kullanarak bağıntıya ulaşmak. Yani göstererek anlatmak ve anlamlı hale getirmeye çalışmak.



Elbette birinci yönteme göre daha iyi. Ancak burada anlatan aktif, dinleyen edilgen durumda.

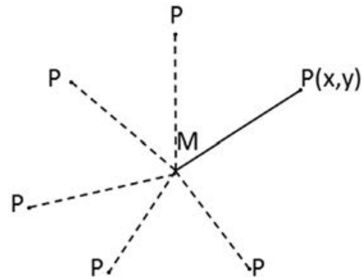
Anlaşılırlığı olumlu olsa da kalıcılığı yeterince yeterli olmayan bir yöntem. Bu sakınca yeterince örnekle kalıcı hale getirilmeye çalışılabilir.

Üçüncü yöntem:

Daha önce (1,3) noktasından 5 birim uzaklıktaki noktaların geometrik yer denklemini yazmak biçiminde bir örnek verdim. Çemberin Analitik İncelenmesi başlıklı konuya da bu veya benzer bir örnekle başlayabiliriz. Hatta konu başlığını bile yazmadan. Öğrencilerin geometrik yer kavramını yeterince kavramış olması gerek koşuldur.

Önce “$|PM| = 5$” önermesi matematiksel olarak yazdırılır. Arkasından da bu önermenin analitik ifadesi olan “$(x-1)^2+(y-3)^2 = 5^2$” denklemi yazılır.

Sonra P noktalarının hangi eğriyi belirlediği tartışılır.



Bu noktaların çember oluşturacağını sezmek öğrenciler için zor değildir. Gelinen noktada bize "merkezi (a, b) yarıçapı r olan çember denklemini yazınız" deme hakkı doğar. Şeklin analitik düzlemde çizilmesini istemek ise, ikinci yöntemdeki anlatıma kadar gider ki, bu da ikinci yöntemin öğrenci tarafından yaratılmasını ve pekişmesini sağlar. Şimdi son yöntemi irdeleyelim.

Bu yöntemde matematiksel önermeden analitik yazıma geçerek matematiğin **yararlılık** ilkesi kullanıldı. P noktaları kümesinin çember olduğu yorumlanarak **matematiksel sezgi kullanıldı**. P(x, y) noktalar kümesinin çembere ait tüm noktaları kapsadığı görülerek matematiksel **tamlığın** gerçekleşmesi de kullanıldı. Matematiksel üç temel ilke olan yararlılık, sezgi ve tamlığın bir arada gerçekleşmesi ve bunu öğrencinin üretmesi bilginin kalıcı olmasını sağlar. Sanırım buna anlamlı öğrenmenin cazibesi demek de olanaklı.

Hareketin çekiciliği

Geometrik yer uygulamasının bazı yaşamsal olayların modellemesi olarak karşımıza çıktığının bir örneğini de verelim. Ve modellemenin, yaşamı algılamadaki cazibesini görelim.

Hareket yasaları eylem olarak fiziğin konusudur. Hareketin nasıl gerçekleştiğine ilişkin kavramlar ise matematiğin üretimidir. Bir hareketli zamana ve hıza bağlı olarak yol alır. Bu fiziksel bir gözlemken matematik ona "yol = hız×zaman" biçiminde evrensel bir bağıntı üretmiştir.

Örnek: Saatte ortalama 10 km sabit hızla giden bir bisikletli (...) saatte kaç km yol alır?

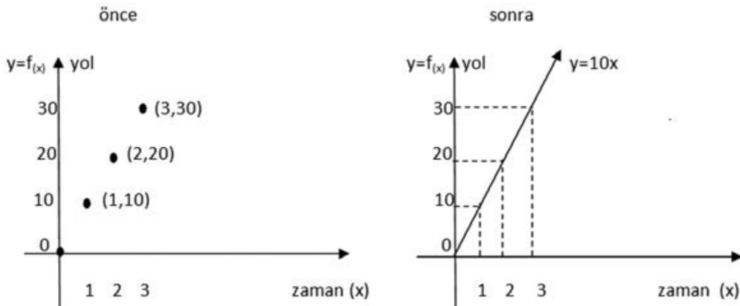
Kolay bir soru. 2000 yıl önce de bu sorular çözülebiliyordu. Ancak denklem ve fonksiyon kavramları bilinmediği için çözümler çizelgelere dökülüyordu. Çözüm şablonları hazırlanıyordu. Elbette bisiklet de yoktu. Belki bisiklet yerine koşan at, koşan eşek ya da 10 km hızla akan ırmaktaki bir dal parçası alınıyordu. Bisiklet at, eşek ya da sürüklenen bir dal… her neyse alınan yol ile ilgili bir çizelge yapılıyordu.

Zaman (x)	1	2	3	4	5	6 …………………
Yol (y)	10	20	30	40	50	60 ………………

gibi. Bu çizelgeden hareketle de

$\frac{1}{10}=\frac{2}{20}=\frac{3}{30}=\frac{4}{40}=\frac{5}{50}=\frac{6}{60}=..........=\frac{x}{y}$ eşitliğinin adı "doğru orantı" olarak belirleniyordu. $\frac{1}{10}=\frac{x}{y}$ den "$y = 10x$" ile "yol eşittir hız × zaman" eşitliği de biliniyordu.

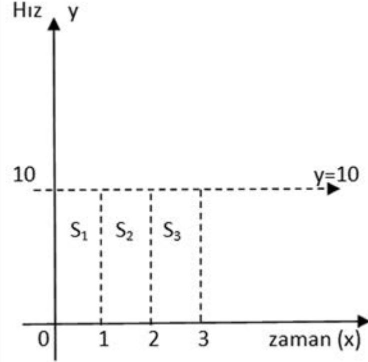
Gel zaman git zaman koordinat geometri bulundu ve bağımlı değişkenler koordinat düzleminde gösterilmeye başlandı. Adına da grafik denildi. İkililerin ilişkilerini belirleyen dizgeye de fonksiyon. Zamanı "x", alınan yolu "y" ile gösteren matematikçiler, y'nin x'in 10 katı olduğu ilişkisini $y = 10x$ ya da $f(x) = 10x$ biçiminde belirleyip aşağıdaki grafikleri çizdiler. Önce tamsayılarla gösterilen grafik, hareketin sürekliliği göz önünde bulundurularak zaman içinde sürekli fonksiyonların grafiklerine dönüştü.



Bu grafikler yaşamdaki bir olayın matematiksel bir modeliydi. Satır biçiminde yapılan çizelgelere göre çok daha kullanışlı idi. Bunlarla da yetinmeyip zamanı "x", hızı "y" ile gösterip zaman hız grafiğini de çizdiler.

Adını sabit fonksiyon koyup "$y = 10$" ya da "$f(x) = 10$" biçiminde yazdılar. Sonra yol-zaman grafikleri ile hız-zaman grafikleri arasındaki ilişkiyi saptadılar. Hız-zaman grafiğine göre; zamanla hızın çarpımı "$y = 10$" doğrusu ile "0_x" ekseni arasındaki alanlar;

$S_1 = 1.10 = 10$,
$S_1 + S_2 = 2.10 = 20$,
$S_1 + S_2 + S_3 = 3.10 = 30, \ldots$
olurken yol-zaman grafiğindeki yol da;



Birinci. saatte 1.10 = 10,
ikinci saatte 2.10 = 20,
üçüncü saatte 3.10 = 30 oluyordu.

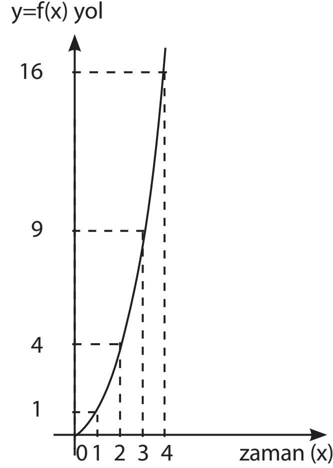
Yani doğrunun altında (belirli bir zamana kadar olan) kalan alan değeri ve o zaman için alınan yol aynı değerdeydi. Her ikisi de "hız × zaman"a eşitti. Bu sonuç da iyi ve güzeldi.

Biraz daha hareket

Ancak yaşamdaki hareket her zaman bu kadar masum değildi. Örneğin düşen cisim düşüş anına kadar sürekli hızlanıyordu. Yükseklik ne kadar çoksa düşme hızı da o kadar çoktu. Öte yandan büyüklükleri farklı iki cisim aynı anda düşüyordu. Ancak bütün bunları ölçmek zor işti. Hatta çok zaman olanaksız. Bir koşucunun belli bir hıza çıkıncaya kadar herhangi bir andaki hızı da düşen cisme biraz benziyordu. Ama aynı şey değildi. Havaya atılan bir taşın önce hızlı sonra yavaş ve bir an durduktan sonra önce yavaş sonra hızlı düşmesi de başka bir şeydi. Hızlanarak veya yavaşlayarak hareket başka bir hareketti. Ona ivmeli hareket dediler. İncelediler.

Örnek: "x" anında "x^2" kadar yol alan bir aracın önce aldığı yolun hesabını ele aldılar. Öyle çizelgeyle falan da değil.

Zamanı “x” yolu “y” ile gösterip “$y = x^2$” fonksiyonunu kurarak, grafiğini çizdiler. Bu yol zaman grafiğine bakan (alınan yol) aracın 1. saniyede 1 metre, 2. saniyede 4 metre yol aldığını görebiliyordu.



Sonra değişen yola karşı değişen hızı bulmaya giriştiler.

Ortalama hız bulunabilirdi. Ortalama hız yollar farkını (alınan yol) zaman farkına bölerek;

$V_{ort} = \dfrac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$ ile buldular.

Örneğin 2. saniye ile 4. saniye arasında ortalama hız;

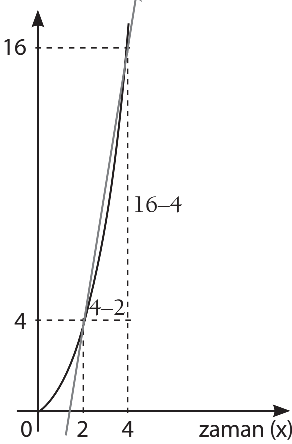
$$V_{ort.} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = 6 \text{ metreydi.}$$

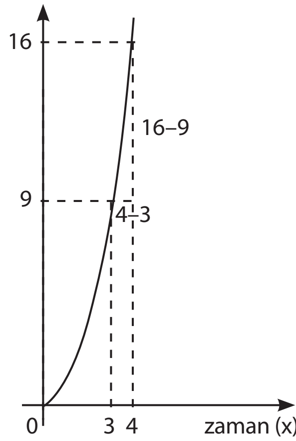
3. ve 4. saniyeler için ortalama hız ise,

$$V_{ort.} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{16 - 9}{1} = 7 \text{ metre.}$$

Aralık azaldıkça hız değişiyor ve 4. saniyeye yaklaştıkça artıyordu. Bu da zaman aralığı “0”a indiğinde 4. saniyedeki hız bulunabilir miydi sorusunu getirdi. Yani anlık hız…

Yol-zaman grafiği büyütülerek yeniden çizildi ve ortalama hızdan başlayarak adım adım gidildi. Aslında yapılan giderek x’i 4’e yaklaştırmaktı.





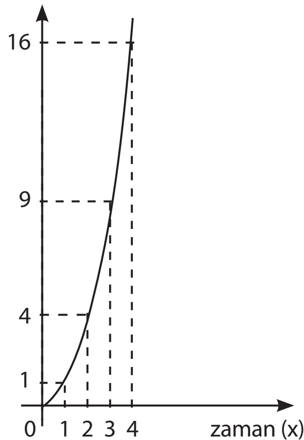
$$V_{ort.} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{16-4}{2} = 6 \qquad V_{ort.} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{16-9}{1} = 7$$

"x"i 4'e daha da yaklaştırdılar. Fark minicik oluncaya dek… Fark "0"a doğru gidiyordu. Bu sonsuz yaklaşıma bir diğer biçimde "limit" dediler. Yani giderek "$m \in X$ için $m \to 4$" olurken, hız da $x = 4$ deki hız, yani "anlık hız" olacaktı.

$$V_{ani} = \lim_{m \to 4}\left(\frac{f(4)-f(m)}{4-m}\right)$$

$$= \lim_{m \to 4}\left(\frac{16-m^2}{4-m}\right)$$

Bu aşamada m = 4 olduğunda sonuç; $\frac{16-16}{4-4} = \frac{0}{0}$ = gibi bir belirsizliğe yol açıyordu. Bu sorun da aşağıdaki biçimde bir sadeleştirmeyle giderildi.



$$\lim_{m\to4}\left(\frac{16-m^2}{4-m}\right)=\lim_{m\to4}\left(\frac{(4-m).(4+m)}{4-m}\right)\text{'de}$$

(4-m)'ler sadeleştirilerek, $\lim_{m\to4}(4+m)$ = 4+4 = 8 bulundu.

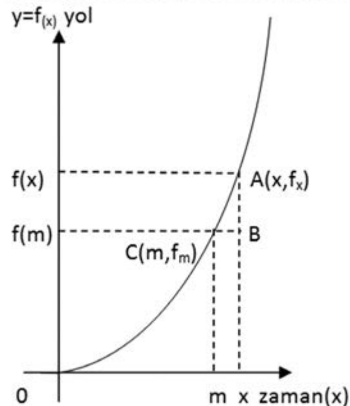
Yani 4 anındaki hız 8 metre oluyordu. Öyleyse V_{ani} = 8 metre yazılabilirdi. Sonuç rahatlatıcıydı. Ama bazı kuşkular da vardı. Örneğin "4–m = 0" ise (4–m)/(4–m) yani 0/0 nasıl sadeleştirilecekti. Bunu açıkladılar. Buradaki "4–m" bildiğimiz "0" değil, "0" a çok yakın olandı. Sonra "4. saniye" kuşku yarattı. Öyle ya. Bir dakika 60 saniyeydi. Saniye içinde de saliseler vardı. Dördüncü saniyenin hangi salisesindeki hızdı bulunan. Onu da anlık hız diyerek çözdüler. Bir anlamda düşünülen en küçük zaman gibi. Biz de yukarıda anlaşılırlık yönüyle saniye kullandık. Ama hızı belirlerken anlık hız dedik. Doğrusu da bu!

Dur durabilirsen

Ama asıl dikkat çeken başka bir şeydi: 4. andaki hız 8 çıkmıştı. Yani zamanın iki katı hıza eşitti. Öyleyse 2. anda "2×2 = 4", 3. anda "2×3 = 6" olmalıydı. Ama bu matematik! Kanıt yoksa sonuç da yoktu. Böyle bir genelleme yapılamazdı. Ancak genellenebilirse; "$y_{yol} = x^2$" yol fonksiyonu, "$y_{hız} = 2x$" olabilirdi. Yani "x^2"nin üssü, x'in başına çarpı (2x) olarak geçer üs de (2–1) olarak azalırdı. Hep böyle miydi? Buna baktılar.

Şekle göre "m" "x"e doğru yaklaşırken "x–m" de "0"a doğru yaklaşacaktı. Yine "m" "x"e yaklaşırken "C" noktası "A" noktasına yani "f_m" de "f_x"e doğru yaklaşacaktı.

"f_x–f_m"de "0"a doğru. Şöyle gösterdiler.



$\lim_{m\to x}\left(\frac{f(x)-f(m)}{x-m}\right)=\lim_{m\to x}\left(\frac{x^2-m^2}{x-m}\right)=\frac{0}{0}$ belirsizliği elde edildi. Ortaya çıkan belirsizliği gidermek için devamla

$\lim_{m\to x}\left(\frac{x^2-m^2}{x-m}\right)=\lim_{m\to x}\left(\frac{(x-m).(x+m)}{x-m}\right)$ sadeleştirip

$\lim_{m\to x}(x+m)=2x$ buldular.

Yukarıdaki varsayım doğrulanmıştı. Yol için $f_{(x)}=x^2$ fonksiyonu anlık hız için $f_{(x)}=2x$'e dönüşüyordu. Yani; değişkenin kuvveti değişkenin başına çarpı olarak geçiyor, kuvvet 1 azalıyordu.

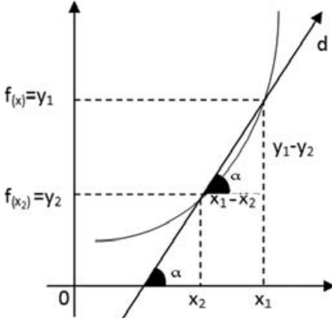
Hep söylüyoruz ya… Matematikçiler iflah olmaz (!) sorguculardır. $f_{(x)}=x^2$ için doğru olan bu önerme diğer fonksiyonlar için de doğru muydu? Bir başka deyişle o da genellenebilir miydi?

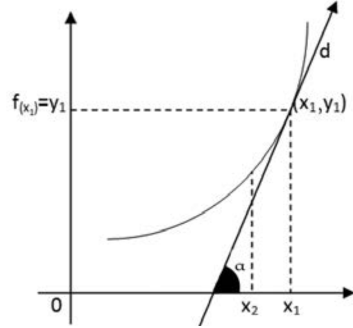
Dediler ve kanıtladılar. Evet öyleydi. Adına da "türev" dediler. Asıl fonksiyondan türediği için olsa gerek. Matematiksel olarak da fonksiyon "$f_{(x)}$" ise türevini "$f'_{(x)}$" biçiminde veya "y" değerlerindeki değişimin, "x" değerlerindeki değişime oranı olduğu için "$\frac{dy}{dx}$" biçiminde gösterdiler.

Örneğin: $f_{(x)}=3x^2-2x+1$'in türevi $f'_{(x)}=2.3x^{2-1}-1.2x^{1-1}=6x-2$

$y=5x^3+x^2-4x+3$'ün türevi $y'=15x^2+2x-4$ oluyordu. Bu sonuçlar matematikte çığır açan sonuçlar oldu. Geometrik yerle başlayıp limitle devam eden serüven türev denilen yepyeni bir konunun ortaya çıkışı ile sonuçlanmıştı.

Bu arada bir şey daha fark edildi. Bu da matematiğin doğurganlığının bir örneği. Ortalama hız bulunurken kullanılan "$\frac{f(x)-f(m)}{x-m}$" veya "$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$" oranı, iki noktası bilinen doğrunun eğimi idi. Öyleyse doğrunun denklemi hatta bir eğrinin bir noktadaki teğetinin denklemi yazılabilirdi. Ya da yazılabilir miydi? Tekrar kolları sıvadılar yapılanları gözden geçirdiler.





Birinci şekle göre "d" doğrusunun eğiminin,
"$m_d = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$" olduğu açıktı. Öyleyse bu iki noktaya göre d doğrusunun denklemi kolayca yazılabilirdi. Bu daha önce ortalama hız için kullanılan bağıntı idi. Demek ki, "$m_d = V_{ort.}$" oluyordu. İkinci şekle göre ise "$x_2 \to x_1$" için d doğrusu teğet oluyordu. O zaman daha önce anlık hız olarak belirlediğimiz sonra da adına türev dediğimiz "$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$" değeri teğetin eğimini veriyordu. Bunun üzerine; "$m_t = f'_{(x_1)}$" biçiminde yeni bir sonuç elde edildi. Yani eğriyi belirleyen fonksiyonun türevi için x_1 değeri teğetin eğimine eşitti. Eğim ve nokta belli ise;
"$y - y_1 = m(x - x_1)$" bağıntısı ile teğetin denklemi yazılabilirdi…

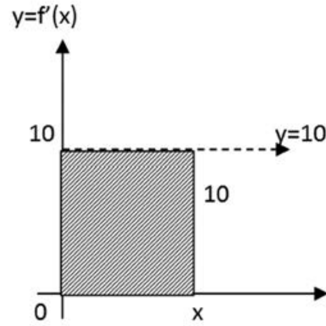
Yola devam

Bunlar ilginç, ilginç olduğu kadar güzel ve yararlı sonuçlardı. Hareketle ilgili sonuçlar, teğet çizme problemine dönüşmüştü. Tam elde edilenlerin keyfinin yaşanacağı anda bu kez de yol-zaman fonksiyonunun hız-zaman fonksiyonuna dönüşürken ortaya çıkan alan ilişkisi akla geldi. Bu kez onu yeniden gözden geçirdiler.

Yol-zaman ilişkisi için fonksiyon "$f(x) = 10x$" iken, hız-zaman ilişkisi için fonksiyon "$f'(x) = 10$" olarak ifade edilmişti. Türev alma kuralı uygulanmıştı. Yani yukarıda verdiğimiz türev alma kuralına göre fonksiyondan türev fonksiyonuna geçilebiliyordu.

Türev fonksiyonu belli iken, asıl fonksiyon bulunabilir miydi? Daha önceki uygulamayı incelediler.

Örnekte hız-zaman fonksiyonu "$y = f'(x) = 10$" idi. $[0,x]$aralığındaki alan "$S = 10x$" idi ve bu da türevlenmemiş fonksiyona yani ilkel fonksiyona eşitti. Yani "$f(x) = 10x$"e. Demek ki burada türev belli iken alan kullanılarak asıl fonksiyona (ilkel fonksiyon) geçilebiliyordu.



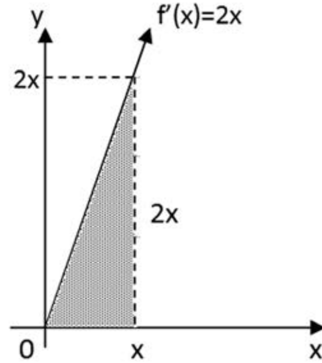
Daha sonraki örnekte de yol-zaman grafiği olan $f(x) = x^2$'den anlık hız için türev fonksiyonu $f'(x) = 2x$ olarak bulunmuştu.

Alan ilişkisi burada da geçerli miydi? Bir başka deyişle türev fonksiyonu belli iken, ilkel fonksiyona geçilebilir miydi?

Şekilde $f'(x) = 2x$ fonksiyon grafiğinin O_x ekseni ile oluşturduğu üçgenin alanı: $TA = \frac{x.2x}{2}$'den "x^2" ye eşit oluyordu. İlkel fonksiyon da $f(x) = x^2$ idi. Öyleyse burada da geçerliydi bu ilke…

$f(x) = x^2$ ise türevi $f'(x) = 2x$, türevi $f'(x) = 2x$ ise fonksiyon $f(x) = x^2$ oluyordu.

Sanki birbirinin tersi gibiydi… Öyle miydi gerçekten?



Baktılar ki, $f(x) = x^2+5$ gibi bir fonksiyonun türevi de $f'(x) = 2x$ oluyordu. Hatta genel olarak her "$k \in R$" içinde aynı şey geçerli idi.

$f(x) = x^2+k$ için türev $f'(x) = 2x$ oluyordu. Birbirinin tersi demek şüpheliydi. Ama yine de bu önemli bir sonuçtu.

Bunu da İntegral olarak adlandırıp; "$f(x) = \int 2xdx = x^2 + k$" ile gösterdiler. Bu buluşla yepyeni bir matematik ortaya çıktı.

Son bir şey daha… "dx" neyin nesi nereden çıktı? Onun da yanıtı vardı.

Hani türevi gösterirken, "$\frac{dy}{dx} = 2x$" olmuyor muydu? İşlem yapıldığında "$dy = 2xdx$" olacaktı. Her iki taraf için integral alındığında: $\int dy = \int 2xdx$ 'den, birinci yan integral sayesinde "y" deki değişimden kurtulup "y" oluyor ikinci yan da "x" için değişimden kurtulup aslına dönerek "x^2+k" oluyordu.

KARŞILAŞTIRMA

Yaşamı anlamanın temel unsurlarından en önemlisi karşılaştırmadır. Ve içinde farklılığı taşır. Değişimi de taşır karşılaştırma. Gerek biçim, gerek hareket, gerek davranış olarak. "Bugün hava aydınlık" deyişi karanlıkla karşılaştırılabildiği için anlamlıdır. Her an aydınlık olsa "aydınlık gün" anlamlı olmazdı. "Islak su" diye kavram yoktur bilincimizde. Kuru olanı yok ki. Hızlı giden araç vardır. Yavaş gideni olduğu için… İyi insan, kötü insan olduğu için vardır. Görece olsa da. Karşılaştırmaya yönelik nesne ve olgular duygusal dünyamızdaki öğrenilmişliklerin sonucudur.

Karşılaştırma öğrenmede de çoğunlukla "farkında olmadığımız" öğrenme biçimidir. Farkında olmadığımız ama her an uyguladığımız. Bir yanıyla yukarıda sözünü ettiğimiz örneklerde olduğu gibi kendiliğindendir. Ama biçimlendirilmiş öğrenme dediğimiz programlı öğrenme de biçimlendirilmiş karşılaştırmalarla doludur. Biçimlendirilmiş karşılaştırmalar öğrenmeyi içerdiği kadar öğrenmede derinleşmeyi, kalıcılığı sağlar. Bu nedenle kalıcılığı hedefleyen öğrenmede "iyi biçimlendirilmiş" karşılaştırmalar yapılmalıdır. İyi biçimlendirme, yeni öğrenmelere, yeni sonuçlara zemin hazırlayandır. Matematik öğretiminde de karşılaştırma, derinliğin, kalıcılığın, bütünlüklü öğrenmenin en iyi yoludur.

Bir önceki örnekte parabol eğrisi ile bir doğruyu karşılaştırdık. Matematikte devrim sayılan yepyeni kavramlara, kuramlara ulaştık. Ama zaten matematiğin kendisi karşılaştırma değil mi? Modelleme dediğimiz ne ki? Başlı başına bir karşılaştırma… Hem de mükemmelleştirilmiş karşılaştırma. Birebir eşlemeyle

ortaya çıkan sayılar karşılaştırmadır. Geometrik şekiller hem kendi aralarında (üçgen, dörtgen, çember gibi) hem de matematik dünyasında biçimlenmiş modellerle yaşamdaki nesnelerin karşılaştırmasıdır. Akışkanların hareketini de karşılaştırarak anlarız. Sonra onları fonksiyon olarak, limit ve türev olarak kuramlaştırır yaşama biçimlenmiş olarak sunarız. Bu kez yaşamdaki davranışlarıyla yeniden karşılaştırırız. Öğrenmeler artar, güçlenir ve kolaylaşır.

İşte bu bölümde üzerinde duracağımız öğrenmeyi güçlendiren bu karşılaştırmalar olacak…

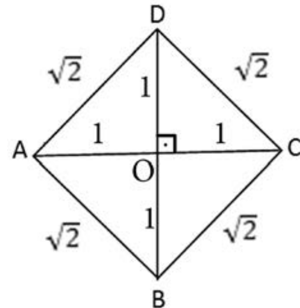
Sayılarda karşılaştırma

İlköğretimin kesintisiz sekiz, liselerin dört yıl olduğu yakın dönemde davet üzerine bir okula matematik seminerleri yapmaya gittim. Biri ortaokul diğeri lise grubu olmak üzere iki seminer yaptık. Düzeylerine uygun olarak akıl yürütme, matematiksel düşünüş ve matematiksel ilişkileri ele aldık. Öğrenciler aktif olarak katıldı ve ilgiyle izledi. Anaokulu (6 yaş grubu) öğretmeni olan arkadaşım kendi öğrencileri için de söyleşi istedi. Şaşırdım… 6 yaşındaki çocuklara matematik semineri! Kıramazdım arkadaşımı. Hazırlıksız yakalanmıştım. Hiç de düşünmemiştim o ana dek. Ancak bu yaş grubunun ana eğiliminin “hayal” ile “gerçek” dengesi üzerinde kurulduğunu biliyordum. Sınıfa geçtik. Tanışmanın arkasından sordum. “Saymayı biliyor musunuz?” Uzun bir “eveeet” ardından hep birlikte saymaya başladılar. 1, 2, 3, …, 30, …, 40… Durmak bilmiyorlar. Susturmak kolay olmadı. “Yazabilir misiniz” dememe kalmadan bir minik yan yana dizili sıraların ardından dolaşmadan önce sandalyenin, sonra sıranın üzerine çıktı, önüme atlayıverdi. Sorgusuz elimdeki kalemi kaptığı gibi tahtaya yazmaya başladı. 10’a geldiğinde durdurdum. “Kaç bu?” “On.” Ben devam ettim. “Bir sıfır desem olmaz mı?” Yanıt toplu geldi: “Olmazzz.” “Ya on bir yerine bir bir, on iki yerine bir iki?” Güldüler. “Olmaz onların adı öyle değil.” Tamam diyerek susmalarını sağladım ve yeniden sordum: “Romalıları biliyor musunuz?” Yanıt dolu; “iki tekerli atlı arabaları var”, “erkekler etek giyiyor”, “kılıçları var”… Yeniden

sordum: “Romalıları kullandıkları rakamları biliyor musunuz?” “Haaayır.” “Öğrenmek ister misiniz? Merak gani. Ne öğrenmek istemezler ki? “Eveeet.”

Roma rakamları ile “I”i gösterdim. Sonra “II”yi. “III”ü sordum yazdılar. Hatta kendileri başladı “IIII”, “IIIII” yazmaya… Durdurmak zor… Susturmayı başardım ve sordum. “Peki, 100’ü nasıl yazarız?” Durdular… Biri duramadı: “tahta yetmez”; diğeri devam etti “duvar da yetmez!” Anlaşmıştık. Ana rakamları verdim. 5’i V biçiminde 10’u X biçiminde yazarız diye. Sonra 4 = IV, 8 = VIII, 9 =IX hatta 12 = XII şeklinde bazı kurallarla diğer sayıları. Kolay anlıyorlardı kuralları. Yeni şeyler öğrenmek hoşlarına gidiyordu. Bir iki çalışma yaptık. Sonra sordum. “Romalılar 1’i neden “I” biçiminde yazmış?” Durdular… Sorulacak soru mu dersiniz. Ama onlar yanıtladılar. Biri “uydurmuşlar” dedi bağırarak. Diğerleri tamamladı. “Eveeet uydurmuşlar.” Uydurma işi hoşlarına gitmişti. Tekrar sordum. “Biz niçin biri ‘1’ biçiminde yazıyoruz?” Yanıt hemen geldi. “Uydurmuşuzzz.” Bu uydurma işi benim de hoşuma gitmişti. “Siz de sınıfınızın rakamlarını uydurabilir misiniz?” Biri fırladı. Önce oturduğu sandalye, sonra sıranın üstü, hoop yanımda. Kalemi kaptı. Dikey bir çizgi ve üst ucuna bir boncuk kondurdu, “P” gibi. Bu birmiş. İki dedim bir boncuk daha, üç dedim bir boncuk daha... Ders bitti. “Siz de akşam evde kendi rakamlarınızı oluşturun” demiş bulundum. Öğretmen arkadaşlar söylediler. Akşam evlerde anneler, babalarla birlikte “rakam uydurma” seferberliği başlamış. Bildikleri ve öğrendikleriyle karşılaştırarak…

Minikken başlayan taklit türü öğrenme büyüdükçe karşılaştırmayla devam eder. Örneğin “ $\sqrt{2}$ ” nin sayı doğrusu üzerindeki yerini tartışalım. Hani şu Pisagor Okulu’nun başına dert olan.



Pisagorcular $\sqrt{2}$’den kaçmış ve gizlemeye çalışmış ama birileri kaçmamış. Köşegenlerini çizdiği kareye dayanıp; DOC üçgeninde; $\sqrt{2} > 1$ ve DAC üçgeninde $\sqrt{2} < 2$ karşılaştır-

masını yapıp $1 < \sqrt{2} < 2$ olduğunu ve bu eşitsizliğin karelerini alıp $1 < 2 < 4$ doğrulamasını yapmışlar. Ama bu aralığın geniş olduğunu görüp “1,1” “1,2” “1,3” “1,4” “1,5” kesir sayılarının karelerini alarak sınamayla, $\sqrt{2}$’nin karesinin “1,4” ile “1,5” ün kareleri arasında olduğunu görmüşler. “$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$” sıralamasına ulaşmışlar ve $\sqrt{2}$ için sayı doğrusu üzerinde daha gerçekçi bir yer bulmuşlar. Ama tam yeri yok!

Bugün de sayı karşılaştırmalarında sorun yaşadığımız olur. “$2\sqrt{3}$’mü büyük, $3\sqrt{2}$ mi?” gibi. Bakar bakmaz anlamak olanaklı değil. “Karesi büyük olan pozitif sayı daha büyüktür” önermesini kullanarak; $a = 2\sqrt{3}$’den $a^2 = 12$ ve $b = 3\sqrt{2}$’den $b^2 = 18$ bularak, $18 > 12$ ile “$\mathbf{3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}}$” yazabiliyoruz.

Ama “$\sqrt{7}+\sqrt{2}$” ile “$\sqrt{5}+\sqrt{3}$” ü karşılaştırmak o kadar kolay değil. Aynı yöntemi izleyelim.

$a = \sqrt{7}+\sqrt{2}$ ise $a^2 = (\sqrt{7}+\sqrt{2})^2 = 7+2+2\sqrt{14} = 9+2\sqrt{14}$

$b = \sqrt{5}+\sqrt{3}$ ise $b^2 = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = 5+3+2\sqrt{15} = 8+2\sqrt{15}$ taraf tarafa çıkartırsak,

$a–b = 1+2\sqrt{14}-2\sqrt{15}$ olur ki bu durumda da hemen yargıya varamayız. Yine kareler alarak yaklaşalım.

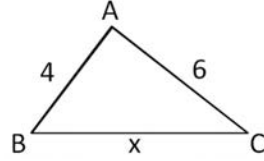
$(2\sqrt{14})^2 = 56$ ve $(2\sqrt{15})^2 = 60$ ayrıca $7^2 = 49$ ve $8^2 = 64$ olduğundan, $49 < 56 < 60 < 64$ sıralamasında karekökler alınarak; “$7 < 2\sqrt{14} < 2\sqrt{15} < 8$” yazılır. Ayrıca “$0 < |2\sqrt{14}-2\sqrt{15} < 1$” ve “$a–b = 1+(2\sqrt{14}-2\sqrt{15}) > 0$” olacağı için “$a–b > 0$ ve $a > b$” olur. Sonuç olarak “$\sqrt{7}+\sqrt{2}$” > $\sqrt{5}+\sqrt{3}$” yazılır.

Biliyorum çok çabaladık. Bu çözümü “çok iyi” diye sunmak olanaklı değil. Bazen net sonuçlar için zahmete katlanmak gerektiğini anımsatmak istedik. Bazı zorunlu karşılaştırmalar karşımıza çıkabilir.

Soru:

ABC üçgeninde $|AB| = 4$, $|AC| = 6$ ve $|BC| = x$'dir.

$m(\hat{B}) < m(\hat{A}) < 90^\circ$ ise "x" hangi tamsayı değerlerini alır?



Çözüm:

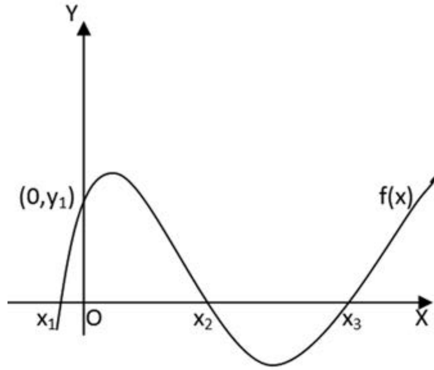
$m(A) > m(B)$ den $x > 6$ (üçgende büyük açı karşısında büyük kenar bulunur) $m(A) < 90°$ den $x^2 < 4^2+6^2$ ve $x < 2\sqrt{13}$'tür. Önermeler birleştirildiğinde; $6 < x < 2\sqrt{13}$ olur. Koşulu sağlayan x tamsayılarını söylemek yine kolay değil. Yukarıda yaptığımız gibi kareler alındığında; $36 < x^2 < 52$ elde edilir. Karesi 36'dan büyük, 52'den küçük tek sayı vardır. O da "7" dir.

Sayılarda karşılaştırmayı genel olarak eşitsizlik kavramı ile ele aldık. Çünkü daha başta karşılaştırma içinde farklılığı taşır dedik. Farklılık ise referans değeri gerektirir.

Zaman zaman sonucu sınamak için de karşılaştırmalar yapılır. Ciddi yanılgıları engellemek için. Örneğin "$|2x-7| = 2x-7$" denkleminin çözüm kümesini bulmak istiyoruz… Öyle ya! Büyüktür-küçüktür dediğimiz zaman ya da azdır-çoktur dediğimiz zaman akla "neye göre" sorusu gelir. Neye göre sorusunun yanıtının olmadığı koşullarda karşılaştırma yoktur. Referans değeri yoksa karşılaştırma yoktur. Örneğin "ayın kuzeyi" bize bir şey anlatmaz. Oysa "dünyanın kuzeyi" anlamlıdır. Onun referans değeri olarak alınan bir ekvatoru vardır. Dünya için anlamlı olan kavram ay için anlamlı değildir. Çünkü bildiğim kadarıyla ayın ekvatoru yok… Ancak matematik biçimlenmiş bir bilim. O nedenle her durumda referans değeri ve karşılaştırmalar vardır.

Fonksiyonlarda karşılaştırma

Lise matematiğinde "fonksiyon inceleme" diye bir başlık kullanırız. Amaç fonksiyonu ve fonksiyondan türeyen konuları daha iyi ve bütünlüklü kavramaktır. Örneğin "denklem" ve "eşitsizlik" fonksiyonun türetmeleridir. Buna türev ve integral de eklenebilir. Bu nedenle denklem, eşitsizlik, türev, integral hatta limit konularının işlenişinde ilgili grafikler kullanılmalıdır. Grafiklerin hem bu konuların nedenini, niçinini, kaynağını bilmek anlamında, hem de görselliğin katkısı anlamında önemli yararları vardır. Elbette bu söylediklerim zaman zaman yapılmaktadır. Ama yapılmadığı zamanlar da oldukça çok. Birçok programda (ya da genel olarak kaynak diyelim) önce ikinci dereceden denklemler sonra ikinci dereceden eşitsizlik işlenmekte bunlardan sonra ikinci dereceden fonksiyonlar işlenmektedir. Oysa öğretim programlarında izlenmesi gereken sıra; fonksiyon-denklem-eşitsizlik biçiminde olmalıdır. O zaman $f(x)$ fonksiyonu ile O_x eksenini karşılaştırma, bu karşılaştırmanın sonuçları (bir anlamda ürettikleri) ile denklem ve ardından eşitsizliklere geçiş avantajlarını kullanmak eşitsizliğin kavranmasını kolaylaştırır. Bilineni anımsatırsak:



"$f(x) = 0$" grafiğin, yatay ekseni (0_x) kestiği noktaları, "$f(x) > 0$" fonksiyonun yatay eksenin üst tarafında kalan değerlerini, "$f(x) < 0$" ise alt bölgesinde kalan değerlerini göstermektedir. Denklemlerde ve eşitsizlikte çözüm kümesi kavramı ise x_1, x_2, x_3 noktalarını bulmak ya da bu noktaların "0_x" üzerinde belirlediği aralıkları ifade etmektedir.

$f(x) = 0$'ın belirlediği denklem için çözüm kümesi;
$Ç = \{x_1, x_2, x_3\}$
$f(x) > 0$ eşitsizliği için $Ç = \{x \mid x_1 < x < x_2,\ x_3 < x < \infty\}$ veya
$Ç = (x_1, x_2) \cup (x_3, \infty)$
$f(x) < 0$ eşitsizliği için $Ç = \{x \mid -\infty < x < x_1,\ x_2 < x < x_3\}$ veya
$Ç = (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$ olacaktır.

Bu sıraladıklarımız bir keşif değil. Elbette bilinenler. Ancak uygulamada pek vurgulamadığımız şeyler. En azından bir arada vurgulamadığımız. Nedeni "konuları yetiştirmek" bile olsa sanırım göze alınması gerekir. Eğer öğrenci bu ilişkileri içselleştirmemişse ve ilişkisel öğrenme gerçekleşmemişse belleğinin derinliklerinde "denklemleri nasıl çözüyorduk" sorusuna yanıt aramaktadır. Bir kez daha vurgulayalım ki denklem ve eşitsizliklere fonksiyonlardan geçiş öğrenmeyi daha anlamlı hale getirecektir. Daha da anlamlı hale getirmek için, çözüm kümesinden hareketle taslak olarak grafik çizmek oldukça yararlı olmaktadır. Yaratmak birçok kez çözmekten daha öğreticidir. Şöyle bir uygulama…

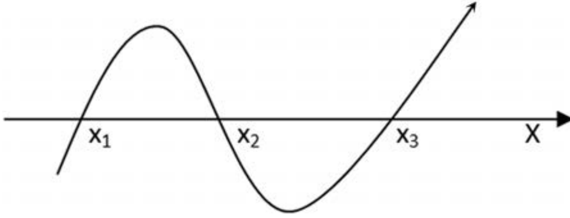
Soru: $f(x) \geq 0$ için çözüm kümesi $Ç = x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, \infty)$ olan üçüncü dereceden fonksiyonun taslak olarak grafiğini çiziniz. Elbette sorulara ve sorunlara açık bir soru. Bu soruyu bir lise grubunda sorduğumda seyir şöyle işledi.

Yukarıda özetlediğimiz ilişkileri kavramış ya da sezmiş olan öğrenciler adım adım öğrendiklerini uyguladılar.

1. adım: x_1, x_2, x_3 denklemin kökleri ve grafiğin O_x eksenini kestiği noktalardır diyerek ekseni çizdiler ve noktaları gösterdiler.



2. adım: $f(x) \geq 0$ eşitsizliğinden ve $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, \infty)$ kümesinden grafiğin "$-\infty$"dan başlayıp "$+\infty$"a doğru gideceğini düşünerek aşağıdaki taslağı çizdiler.



3. adım: Çizim bitmemişti. Grafiğin şekildeki gibi mi ya da simetriği gibi mi olacağı tereddütler yaratmıştı ama sorunun üstesinden geldiler. Asıl sorun O_y dikey eksenini yerleştirmekteydi. Bulamadılar. Bulmalarını da istemiyordum. İstediğim verilenlerin yetersizliğini görmeleriydi. Onu da gördüler. Bu kez ben yeniden sordum: "Soruyu nasıl tamamlamalıyız?" Biraz zorlansalar da söylediler. " $f(0) > 0$", "$x_1.x_2.x_3 < 0$" … gibi. Verilenlerin yeterliliğini tartışmak da taslağı çizmek kadar ilgi çekti. Arkasından da yatay ekseni tek noktada kesen 3. dereceden bir grafik üzerinde tartıştığımızı anımsıyorum. $Ç = x \in [\, x_1, +\infty]$' un grafiği gibi…

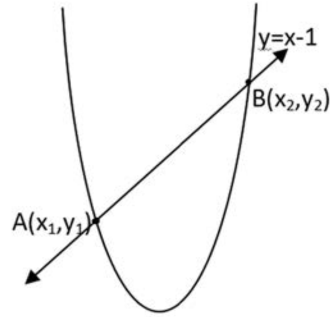
Fonksiyonların eksenlerle karşılaştırılmasının iyi kavranması, iki fonksiyonun karşılaştırılması için gerekli bir ön adımdır. Öğrenciler ne yapacağını bilecek duruma gelmiş demektir. En azından da ileri tartışmalara açık hale…

Örnek: $f(x) = x^2–2x–5$ fonksiyonu ile $y = x–1$ doğrusunun kesim noktalarını bulunuz. (Ya da kesişim noktaları A ve B ise AB uzunluğunu veya AB doğru parçasının orta noktasını…)

Çözüm: Taslak çizmek ve taslak üzerinde tasarımda bulunmak ilk adımdır. Ancak öğrencilerden bir kısmı koordinat düzleminde fonksiyonun noktalarını belirleyerek taslak çizme eğilimindedir. Bu yaklaşım zahmetli olduğu gibi, şekli karışık hale getirecektir. Bunun bu soruda gereksiz olduğu vurgulanmalıdır. Çözüme geçildiğinde ise; "analitik düzlemde bir nokta ya da noktalar bulunacaksa o nokta ya da noktalardan geçen fonksiyonların ortak çözümü aranır" vurgusu yapılmalıdır. Yani denklem sistemi çözülmelidir. Ardından denklem sistemi çözülerek;

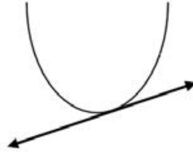
$y = x^2 – 2x – 5$
$– y = x – 1$

$0 = x^2 – 3x – 4$ elde edilir ve çarpanlara ayrılarak $(x – 4).(x + 1) = 0$ olur.
$x – 4 = 0$ için $x_1 = 4$ ve $x + 1 = 0$ için $x_2 = –1$ bulunur.
$y = x – 1$'de
$x = 4$ ise $y = 4 – 1 = 3$ ve nokta: A(4,3) $x = –1$ ise
$y = –1 – 1 = –2$ ve
nokta: B(–1, –2) olur.



Bu örnek, "ikinci dereceden bir fonksiyon ile bir doğrunun karşılaştırması" ara başlığına ilişkin bir örnek. Ve başlıktan sonra böyle bir örnekle soruya yaklaşmak yerine genellikle;







açıklaması yapılır. Bu bir yaklaşım elbette. Ancak öğrenciyi edilgen kılan bir yaklaşım. Bana göre doğru olan yukarıdakine benzer bir örnekle başlamak. Daha sonra $y = x^2 – 2x – 5$ fonksiyona teğet olan ($y = 2x – 9$ gibi) ve yine aynı fonksiyonu kesmeyen ($y = x – 8$ gibi) doğrularla karşılaştırarak sonuçlara ulaşmalarını sağlamak.

Bu açılımın yeni sorusu da; $y = x + n$ doğrusu $f(x) = x^2 – 2x – 5$'e teğet ise "n" kaçtır biçiminde olabilir. Ya da (kesmesi veya kesmemesi için) biçiminde $\Delta > 0$ ve $\Delta < 0$ önermelerini gerçekleyecek örneklerle devam edilebilir.

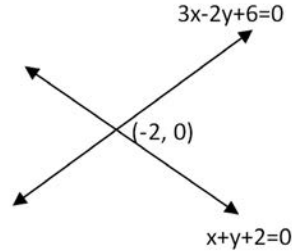
Yapılan önemli yanlışlardan birini vurgulamadan geçmeyelim. Yukarıda verdiğimiz, $y = x – 1$ doğrusu $f(x) = x^2 – 2x – 5$ fonksiyonunu hangi noktada keser sorusunun çözümü için öğretenlerce

"ortak çözüm yapın" yerine "birbirine eşitleyin" ifadesi kullanılmaktadır. Doğru mudur?

Analitik geometri işlediğim birçok derste "$3x-2y+6 = 0$ ile $x+y+2 = 0$ doğrularının kesişim noktalarını bulunuz" dediğimde öğrencilerin $3x-2y+6 = x+y+ 2$ eşitliğinden $2x-3y+4 = 0$ yazıp "şimdi ne yapacağız" dediğini biliyorum. Ne yapacak? Hiç! Çünkü "birbirine eşitlemek" diye bir denklem sistemi çözümü yok... Bu bize bir kez daha göstermektedir ki; matematiğin terim ve kavramları yerli yerinde kullanılmalıdır.

İki doğrunun karşılaştırılması ve denklem sistemi çözümü deyince aklıma analitik geometri derslerinde "iki doğrunun birbirlerine göre durumları" başlığı gelir. Öncelikle belirteyim "iki doğrunun karşılaştırılması ve birinci dereceden denklem sistemleri" biçimindeki birleştirilmiş başlık bence daha uygundur. Bu başlık altında, çıkarımcı bir yöntemle ve ilişkili sorularla sonuca gitmek oldukça kavratıcı olmaktadır.

1. soru: $d_1 : 3x-2y+6 = 0$ ile $d_2 : x+y+2 = 0$ "doğrularının kesişim noktalarını bulunuz". Veya "denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz." Sorunun -iki ayrı biçimde sorulsa da- aynı anlama geldiğiyle tartışmaya başlamak önemli.



Çözüm genellikle yok etme yöntemi kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+6 &= 0 \\ x+y+2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 3x-2y+6 &= 0 \\ 2x+2y+4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ taraf tarafa toplandığında}$$

$5x+10 = 0$ dan $x = -2$ ve -2 denklemlerden birinde yerine konulduğunda;

$-2+y+2 = 0$ dan $y = 0$ bulunur ve denklem sisteminin çözümü olarak $Ç = \{(-2, 0)\}$ olarak gösterilebilir. Genel sonuç:

$$\mathbf{d_1 \cap d_2 = \{A\} \Leftrightarrow Ç = \{(x_1 , y_1)\}}$$

2. soru: $d_1 : 3x-2y+6 = 0$ ile $d_2 : 3x-2y-4 = 0$ doğrularının kesişim noktasını (denklem sisteminin çözüm kümesini) bulunuz.

Doğruların eğimlerinin aynı olduğunu gören bazı öğrenciler paralellik nedeniyle kesişmeyeceğini ve çözüm kümesinin boş küme olduğunu söyler. Ama biz çözüm yapmaları için ısrar ederiz.

$3x-2y+6 = 0$ ve $3x-2y-4 = 0$ yazar taraf tarafa çıkartarak "$10 = 0$" çelişkisine ulaşırlar. $Ç = \varnothing$ (boş küme) demeleri zor olmaz. Genel sonuç; $\mathbf{d_1 \cap d_2 = \varnothing \Leftrightarrow d_1 // d_2}$ biçiminde yazılır.

3. soru: $d_1: 3x-2y+6 = 0$ ile $d_2 : 6x-4y+12 = 0$ doğrularının kesişim noktasını (denklem sisteminin çözüm kümesini) bulunuz.

Bu soruda da bazı öğrenciler katsayıların orantılı olduğunu görür. Yine "bu doğrular paralel, çözüm kümesi boş küme" diyenler olur. Biz ise çözüm yapmalarında ısrarcı oluruz.

Denklemlerin katsayılarını eşitleyip taraf tarafa çıkarırlar ve "$0 = 0$" gibi totolojik bir sonuca ulaşırlar. Sorun da burada başlar. Çözüm kümesi nasıl ifade edilecek? Emin olmadıkları bazı yanıtlar verirler; "tüm reel sayılar" gibi. Sorunun altına seçenekler sıralarsınız;

A) R   B) $(-\infty, \infty)$ C) R×R   D) ∞ E) $\{(x,y) \mid y = \dfrac{3x+6}{2}\}$

gibi. Bu seçenekleri görüp "bunda bir iş var" diyen birkaç öğrencinin aklına "E" seçeneği gelir. Çünkü en heybetli görünen odur… Sonuçta yanıtın E seçeneği olduğunu açıklarsınız. Ve, "d_1 ve d_2 doğruları çakışık ise çözüm kümesi doğrulara ait her noktadır" dersiniz. Sonra da bu seçeneklerin doğru olup olmadığını tartışırsınız.

Tarihini hatırlamadığım bir sınavda iki noktanın kesişimiyle ilgili bir soru soruldu. Soru, verilen iki doğrunun kesişim noktasından ve yine verilen bir noktadan geçen doğru denkleminin yazılmasını istiyordu. Yani "doğru demeti" ile ilgiliydi. İtirafımdır. Benim öğrencilerim de aralarında olmak üzere soru öğrencileri zorladı. Çünkü bizim çözme tarzımız ortak çözüm yaparak iki doğrunun kesiştiği yeri bulmak ve verilen diğer nokta ile

birlikte doğrunun denklemini yazmak biçimindeydi. Verdiğimiz denklemleri de ortak noktası kolay bulunan denklemler olarak seçerdik. Ancak sınav sorusunda verilen denklemler hiç de öyle değildi. Doğrular kesişimi zor bulunacak biçimde seçilmişti. Hata yapma riski de çoktu. Sorun o nedenle yaşandı.

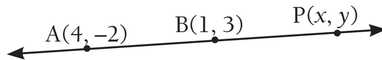
O sorunun sorulmasının ardından "doğru demeti" özellikle üniversiteye hazırlık kitaplarında konu başlığı oldu. Liseler için de öyle. Ancak birilerinin bir yerlerden aktarımıyla;

Verilen iki doğru ($d_1 : a_1x+b_1y+c_1 = 0$, $d_2 : a_2x+b_2y+c_2 = 0$) olmak üzere doğru demeti denklemi $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2) = 0$ ve $k \in R$ biçiminde verildi. Sonra da "bu tür!" soruların nasıl çözüleceği anlatıldı: "Doğru demeti denklemini yazın, verilen noktayı uygulayarak "k" yı bulun, bulduğunuz "k" değerini doğru demetinde yerine koyun, sonuç aranan denklemdir" gibi. Neden böyle bir denklem? Neden verilen nokta uygulanacak? Neden "k" yerine konulduğunda aranan denklem olacak?... Öğrenciyi bırakın, yetişmiş bir insanı bile yaptığı işe bu denli yabancılaştırabilecek benzer kaç şey bulabilirsiniz?.. Biz yine hep yaptığımızı yapalım. Örnek sorular üzerinden adım adım ilerleyerek hem doğru demetinin gereğini hem de yukarıdaki nedenleri ortaya koyalım.

Soru: $2x+y-6 = 0$ ile $x+3y+2 = 0$ doğrularının kesişim noktasından ve (1, 3) noktasından geçen doğru denklemini yazınız.

Çözüm: 1) Önce ortak çözüm yaparak (denklem sistemini çözerek)

$(2x+y-6 = 0) \cap (x+3y+2 = 0) = \{(4, -2)\}$ noktası bulunur. Daha sonra A(4, –2) ve B(1, 3) noktalarından geçen doğru denklemi yazılır.



$m_{PA} = m_{AB}$ eğim eşitliği kullanılarak

$\dfrac{y-(-2)}{x-4} = \dfrac{3-(-2)}{1-4}$'den $\dfrac{y+2}{x-4} = \dfrac{5}{-3}$ ve $\mathbf{5x+3y-14 = 0}$ bulunur.

Çözüm: 2) İkinci çözüm olarak yukarıda verilen kuralı uygulayalım.

$x+3y+2+k(2x+y-6)=0$ doğru demeti denkleminde (1, 3) noktası "x" yerine 1, "y" yerine 3 konularak uygulanır.

$1+3.3+2+k(2.1+3-6)=0$ dan, $k=12$ bulunur. Bulduğumuz "$k=12$" doğru demeti denkleminde yerine konularak,

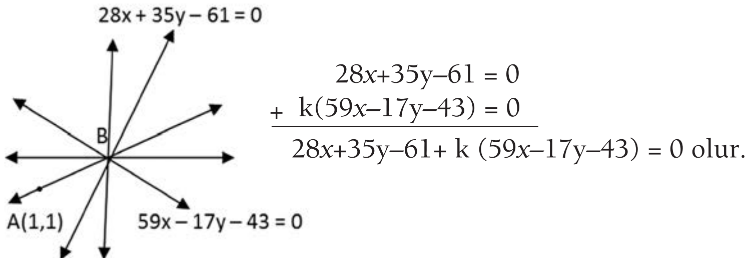
$x+3y+2+12(2x+y-6)=0$ dan, $25x+15y-70=0$ ve $\mathbf{5x+3y-14=0}$ elde edilir.

Hangi çözümü tercih edersiniz sorusunun yanıtı eminim birincisi olacaktır. Daha uzun olmasına karşılık… Çünkü daha bildik, daha anlamlı. Ancak aşağıdaki gibi bir soru sorulduğunda işimiz çok zor.

Soru: $28x+35y-61=0$ ile $59x-17y-43=0$ doğrularının kesişim noktasından ve A(1, 1) noktasından geçen doğru denklemini yazınız.

Çözüm: Hiç kimse ilk yolu denemek bile istemeyecektir. Denklem sistemini çözmeye kalkmak tüm enerjiyi tüketmeye yeter. Başka yol denenmelidir. Bu da yukarıda ikinci yol olan doğru demeti kavramını kullanmaktır. Bir kural bir kalıp gibi… Bu kuralı hiç öğrenmemiş olabiliriz. Ya da öğrenmiş ve unutmuş olabiliriz. Genel ilkelerden yola çıkalım ve yorumlarda bulunalım.

Verilen iki doğrunun kesişim noktasını bulmak gerek. Her zaman yaptığımız gibi.. Bunun için de denklemlerden birini (ya da ikisini) bir sayı ile genişletip "x" ya da "y"nin katsayılarını eşitliyorduk. Bir denklemin tüm terimlerini bir sayı ile çarptığımızda denklemin grafiğinin ve elbette doğruya ait noktaların değişmediğini biliyoruz. Şekil çizelim ve söylediklerimizi yapalım.



$$\begin{array}{rl} & 28x+35y-61=0 \\ + & k(59x-17y-43)=0 \\ \hline & 28x+35y-61+k(59x-17y-43)=0 \text{ olur.} \end{array}$$

x ve y'den başka "k" değişkeninin olduğu bu denklemin bize belletilmeye çalışılan denklem olduğu şimdi açıktır. İlkelerden yola çıktık ve biz ürettik. Bu durumda iki doğrunun kesişim noktasından geçen bütün doğruların denklemini yani "doğru demeti" denklemini elde ettik.

$28x+35y-61+k(59x-17y-43) = 0$ doğruları tek bir "k" değeri için A(1, 1)'den geçecektir. Denklemde bu nokta $x = 1$ ve $y = 1$ için uygulanırsa; $28.1+35.1-61+k.(59.1-17.1-43) = 0$ dan $k = 2$ bulunur. Bulunan "$k = 2$" genel denklemde yerine konularak;

$28x+35y-61+2.(59x-17y-43) = 0$ dan $\mathbf{146x+y-147 = 0}$ elde edilir. Kesişim noktası olan "B"yi bulmadan istenen denklemi elde ettik. "B" noktasının verilen iki denklemin ortak çözümünden elde edileceğini düşünmek pek akıllıca olmasa gerek.

Şimdi yine hep yaptığımızı yapalım ve sonuçlar çıkararak genellemeye gidelim. Sonuçlardan da dileyenin yanıtlayacağı sorular üretelim.

Birincisi: $k.(ax+by+c) = 0$ eşitliğinde "k" sabiti $ax+by+c = 0$ denkleminin gösterdiği grafiği ve koordinat düzlemindeki noktaları değiştirmemektedir. (Soru: $f(x) = k.(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2} +\ldots.)$) için de aynı şeyi söyleyebilir miyiz?

İkincisi: "$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2) = 0$" hatta "$k_1(a_1x+b_1y+c_1)+k_2(a_2x +b_2y+c_2) = 0$" doğru demeti denklemindeki "k" değişkenleri doğruların kesiştiği ortak noktayı değiştirmez. [Soru: $(k-2)x+(k+1)y+3k-2 = 0$ doğrularının geçtiği ortak nokta nasıl bulunur?]

Üçüncüsü: "$a_1x+b_1y+c_1 + k(a_2x+b_2y+c_2) = 0$" denkleminde seçilen her keyfi "k" değeri farklı bir doğru belirler. Elbette eğimler de değişmektedir. (Soru: Neden?)

Şimdi gelelim "bir soru için bu kadar gevezelik yapmak gerekir miydi" veya "soru güzel mi" sorusuna. İlk yanıt: Son verilen şekliyle bu soru öğrenciyi "kurallı" çözüme yönlendirmektedir. Eğer hedeflenen kazanım "kuralı" uygulatmakla sınırlı ise bana göre önemli bir uygulama değil. Ama kazanım olarak "kuralı yaratma" hedefleniyorsa soru anlamlı ve önemlidir. Elbette uygulama da. İkinci yanıtım ise şu: İlkelerden hareketle "üreterek çözmek"

genellikle yeni açılımların habercisidir. Bu noktada da bu haberi iyi algılamak ve değerlendirmek gerekir. İki doğru için kavranan "doğru demeti" kavramı; iki parabol için "parabol demeti", iki çember için "çember demeti" vb gibi açılımlara gebedir. Bu anlamda matematiğin hem "serüvenci" yapısına hem de "yararlılık" ilkesine uygundur. O zaman gelişigüzel bir soru değildir. İki yanıttan da anlaşılacağı gibi bir soruyu "güzel" yapan sadece sorunun kendisi değildir. Hatta daha çok, sorunun nasıl ele alınıp "çözüldüğü"dür. Matematik beyinsel bir etkinliktir. Ve beyinsel etkinliğin sürekliliği vardır. Bizim yeğlediğimiz "gideri çok" olanlardır. O nedenle her çabanın ardından yeni açılımlar ararız. Bu açılımlar, içeriği aşağıdaki gibi olan sorularla geliştirilebilir.

$y = x^2 - 2x - 3$ ile $y = - x^2 - 4x - 5$ parabolleri için $(x^2 - y - 2x - 3) + k.(x^2 + y + 4x + 5) = 0$ parabol demeti denklemini yazdırma.

Ya da; $y = x^2 - 2x - 3$ ile $y = 2x - 1$ doğrusunun kesişim noktalarından geçen parabollerin denklemini

$x^2 - y - 2x - 3 + k.(2x - y - 1) = 0$ biçiminde yazdırma... gibi. Yani genelleme ve genellemenin avantajları.

Geometride karşılaştırma

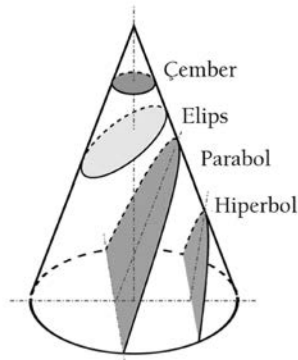
Geometrik şekiller yaşamdaki nesnelerin biçimlerinin matematik dünyasındaki modelleridir. Yani doğrudan karşılaştırma. Bu nedenle özellikle de Öklid Geometrisindeki şekillerin yaşamsal karşılıklarını görmek daha kolaydır. Bunu görmek ise geometriyi daha anlaşılır daha anlamlı kılmaktadır. Geometri dilinin türetilmesi de günlük dilin türetilmesi ile doğrudan ilintilidir. Üçgen, dörtgen, köşegen, alan, hacim… gibi. Geometrinin yaşamsal bağını gösteren bir önemli gerçek de tarihselliği ve tarihsellik içinde aksiyomatik yapısının eskiliğidir.

> Geometrinin, Öklid'in zamanından şimdiye kadar bir aksiyomatik sistem formunda olması gelenek olmuştur. Modern matematikçiler tarafından geometri için bazı diğer farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir; fakat bu aksiyomatik yaklaşım, geniş bir şekilde kullanılmaya devam etmiş ve yeni başlayanlara sunulmuştur. Buna rağmen, bizim sayı matematiğimiz, geleneksel olarak aksiyomatik formda düzenlenmemiştir. Aritmetik, lise cebiri ve (analiz başlığı altına

giren) diferansiyel integral hesap gibi konular, yasaların aksiyomatikleştirilmiş sistemleri formundan ziyade, hesaplama kuralları toplamı olarak geleneksel biçimde sunulmuştur. (Stephen F. Barker, *Matematik Felsefesi*, çev: Yücel Dursun, İmge Kitabevi, s. 95)

Geometrinin aksiyomatik yapısı üzerine inşa edilen birçok teorem ve kuram karşılaştırmalara dayanır ve çok eski tarihlere dek uzanır. Örneğin; konikler başlığı ile ele aldığımız elips, hiperbol ve parabol öğretmen için anlatılması, öğrenci için anlaşılması kolay olmayan konulardan biridir. Yıllarca elime verilen programa göre elips, hiperbol, parabol ve koniklerin genel incelenmesini anlattım. Ama itiraf edeyim, hiç istekli ve heyecanlı değildim.

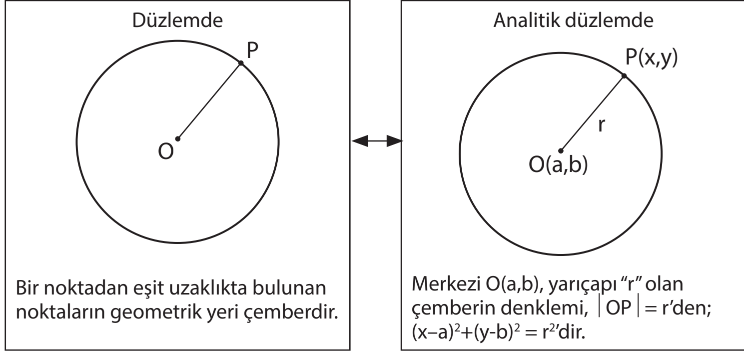
Ne zaman ki "bunlar nereden geliyor" sorusuna yanıt buldum konuya içim ısındı. Çünkü soru beni MÖ 200 yıllarına götürmüştü. O yolculuktan sonra da konikleri anlatmayı değiştirdim. Önce kesit olarak koniklerin oluşumunu, sonra geometrik yer ağırlıklı genel incelemeyi (hem sentetik hem de analitik biçimleriyle) daha sonra parabol, elips, hiperbol sıralaması ile işledim. Koniklerin tarihi birçok matematiksel bulgunun da tarihiydi. Karşılaştırma merakıyla bulunan ilginç şekiller (ne işe yarayacağı düşünülmeden) 1800 yıl sonra uygulamalı matematik alanında yer buluyordu. 1800 yıllık bir gömü gibi.



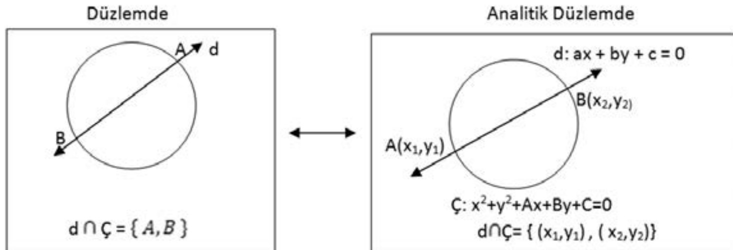
Ünlü ve klasik bir örnek de koni kesitleri denilen düzlemsel eğriler topluluğudur. Bu topluluk çember, elips, parabol ve hiperbolları içerir. Bu eğriler ilk olarak İ.Ö. 200 yılında Apollonius adında bir matematikçi tarafından incelenmiştir… Apollonius'un çalışmaları… hemen hemen 2000 yıl boyunca matematik literatüründeki yerinde, açık seçik, ama pek kullanılmadan, oturup durmuştu. 1600 yılı dolayında Johannes Kepler gezegen hareketleri konusundaki ünlü üç yasasını açıklayarak astronomide bir devrim yarattı… Kepler, bu

çalışmaları sırasında, Apollonius'un matematiğinden çokça yararlanmıştır… (Jerry P. King, *Matematik Sanatı*, çev: Nermin Arık, TÜBİTAK Yay. s. 101-102)

İki şeklin karşılaştırılması örnekleri geometride çoktur. Ve bu karşılaştırmalar yeni kavramlara, yeni öğrenmelere yol açar. Yani doğurgandır. Daha önce de belirttiğimiz gibi doğurganlık, yaratıcılık duygusunu ve öğrenmede kalıcılığı-derinliği sağlar. Örneğin uzayda bir doğru ile düzlemin, iki düzlemin, bir düzlem ile kürenin … karşılaştırmaları gibi. Ya da düzlemde nokta ile doğrunun, iki doğrunun, doğru ile çemberin… karşılaştırmaları gibi. Bu karşılaştırmalar aynı zamanda geometri - analitik geometri geçişlerinin zeminini yaratır. Örneklerde olduğu gibi…



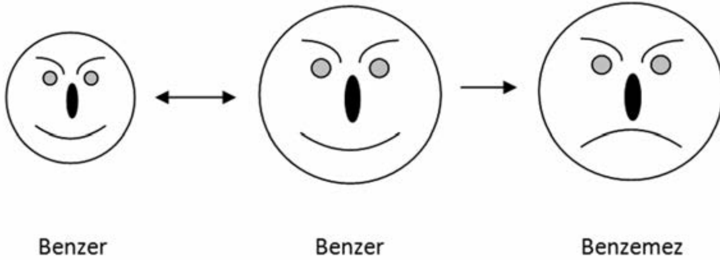
Veya bir doğru ile çemberi karşılaştırırız. Birer noktalar kümesi olan doğru ile çemberin arakesiti (kesişim kümesi) düzlemde A ve B gibi herhangi iki nokta iken, analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ gibi yeri belirli iki noktadır. Bu iki noktaya ulaşmak için iki kümeyi belirleyen denklemlerin ortak çözülmesi gerekir.



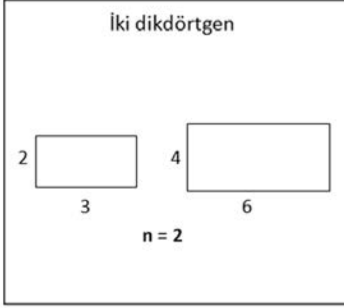
Ancak geometride karşılaştırma denilince ilk akla gelen "benzerlik" konusudur. Benzerlik geometride iç karşılaştırmanın özünü oluşturur. Hem yararlılığı (birçok teoremin ispatında kullanılır), hem genelleme (her şeklin benzeri vardır), hem de hareket yeteneği (her boyuta uyarlanabilir) çoktur. O nedenle de benzerlik, eksiksiz kavranması gereken bir konudur. Ancak benzerlik konusu programda "üçgende benzerlik" olarak sıkıştırılmış durumdadır. Bu sıkıştırılmışlık hem konunun kavranmasını zorlaştırmakta hem de bizi genellemenin yararlarından uzaklaştırmaktadır. Nasıl ele alınmalı öyleyse?

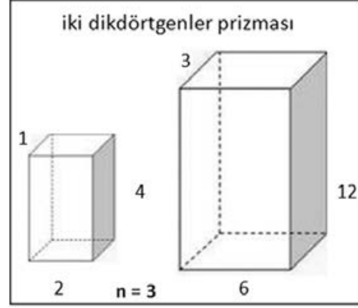
Benzerlik yaşamda en çok karşılık bulan matematik konularındandır. Bu nedenle konuya başlarken yaşamsal karşılıkları tartışılarak başlanmalıdır. Bu tartışmalarda yaşamdaki benzerliğin göreceliğine karşılık geometrideki benzerliğin netliği iyi vurgulanmalıdır. Ve adım adım şu dört ilke kesinlikle anlaşılmalıdır.

1) Düzlemdeki bir şeklin veya uzaydaki bir cismin büyütülmüş ya da küçültülmüş hali o şekil ya da o cismin benzeridir. Şekle veya cisme ait her eleman aynı oranda büyür ya da küçülür.

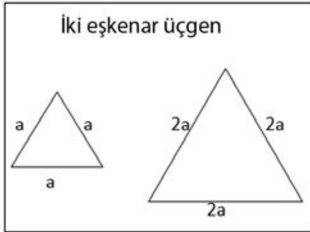


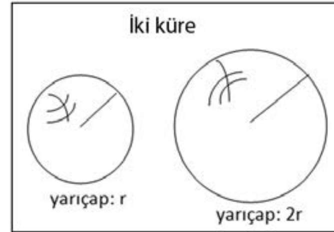
2) İki şeklin ya da iki cismin büyüme veya küçülme oranına "benzerlik oranı" denir.



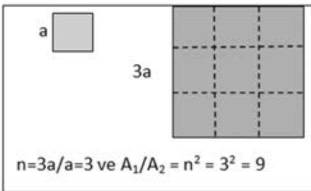


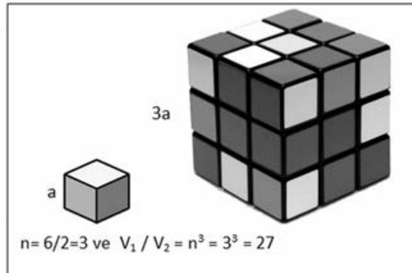
3) Düzgün iki şekil (iki eşkenar üçgen, iki kare, iki düzgün beşgen,… iki çember) veya iki düzgün cisim (iki küp, iki düzgün dörtyüzlü, … iki küre) her zaman benzerdir. Bunlar tek boyutu bilindiğinde tüm niceliksel değeri bulunabilen şekil ve cisimlerdir.





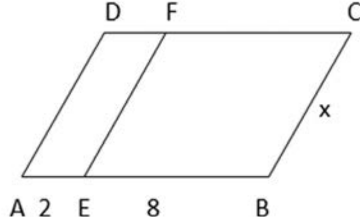
4) Benzer iki şeklin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine, benzer iki cismin hacimlerinin oranı benzerlik oranının küpüne eşittir.





Bu dört ilke üzerinde yapılan çalışma genellikle o güne dek öğrenilen "benzerlik ezberinin" bozulmasına yönelik olacaktır. Ve öğrenen daha gerçekçi benzerlik kavramına ulaşacaktır. Devamında birkaç soru ile ezber bozmaya devam edilmelidir.

Soru:
ABCD paralelkenarı ile ADFE paralelkenarları benzerdir.
$|AE| = 2$, $|EB| = 8$ ise
$|BC| = x$ kaç birimdir?



Çözüm: ABCD ~ ADFE yazıldıktan sonra yazılış sırasının önemli olduğu vurgulanarak

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{DF} = \frac{CD}{FE} = \ldots\ldots \frac{10}{x} = \frac{AC}{AF} = \frac{x}{2} = \ldots\text{'den,}$$

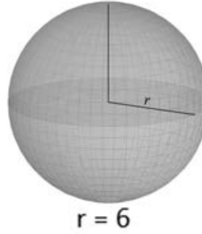
$\frac{10}{x} = \frac{x}{2}$ ve $x = 2\sqrt{5}$ bulunur.

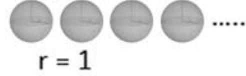
Çözümün ardından, benzerlik oranının;

"$n = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$" olduğu, sıralı köşegenlerin oranının "$\sqrt{5}$", alanlarının oranının da "n^2" den "5" olduğu tartışılır. Sonra kavram olarak benzerliğin daha anlamlı hale gelmesi için şöyle bir soru ile devam edilebilir.

Soru: Yarıçapı 6 cm olan madeni küre eritilerek yarıçapı 1 cm olan küçük küreler oluşturuluyor. 6 cm yarıçaplı küreyi boyamak için 200 gram boya kullanılıyorsa, küçük kürelerin tümünü boyamak için kaç gram boya kullanılır?

Çözüm:





Kürenin alan ve hacim formüllerini bilen öğrenci ilk elde bu formüllerle soruyu çözmeye girişir. Bu girişime elbette karşı çıkılmaz. Ancak büyük kürenin hacmiyle, küçük kürelerin toplam hacminin değişmeyeceği uyarısı ve benzerliğin kullanılıp kullanılamayacağı sorusu ile farklı bir çözüm düşündürülmelidir.

Benzerlik oranı; "$n = 6/1 = 6$". Hacimlerinin oranı; "$V_b/V_k = 6^3$ den, $V_b = 216V_k$" eşitliği bulunur. Bu eşitlik 216 tane küçük küre oluşacağını gösterir. Aslında sorunun bu aşaması bile ilginç bir gizemin açığa çıkmasıdır. 216 küçük küre oluşacağı gerçeği oldukça şaşırtıcı gelir öğrencilere. İlk karşılaştığımda bana da öyle gelmişti.

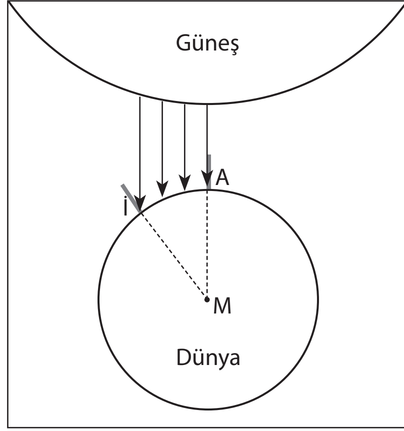
Diğer yandan büyük kürenin bir küçük kürenin alanına oranı; " $S_b/S_k = 6^2$ den $S_b = 36\ S_k$" olur. Bu da büyük kürenin alanının küçük kürenin alanının 36 katı olduğunu gösterir. Küçük kürelerin toplam alanı ise 216 S_k dır.

Küçük kürelerin toplam alanı/büyük kürenin alanı = $216S_k\ /\ 36S_k = 6$ dır. Bu da küçük kürelerin alanları toplamının büyük kürenin alanının "6" katı olduğunu gösterir. Kullanılacak boya miktarı da 200.6 = 1200 gram olacaktır.

Bir matematik çözümünü sözlerle anlatmak hiç kolay değil. Birçok kez olduğu gibi burada da bu zorluğu yaşadım. Çünkü matematikle içli dışlı olanlar bu anlatıma dudak büker. Ama matematikle içli dışlı olmayanları da göz önünde bulundurmak zorundayım. Verdiğim örneklerde benzerliğin bir "karşılaştırma" olduğunu ve anlamlı kavranması halinde diğer matematik kurallar kullanılmadan basit çözüm yöntemi olabileceğini göstermeye çalıştım.

MÖ 200 yıllarında, bir matematikçinin **dünyanın çevresi ve yarıçapını** gerçeğe oldukça yakın olarak hesaplaması "karşılaştırma"ya güzel bir örnektir.

MÖ 276-194 yıllarında yaşayan Eratosthenes aralarında 5000 stadyom (o gün kullanılan uzaklık ölçüsü) uzaklık bulunan Aswan ve İskenderiye'de yere dik birer çubuk diker. A ve İ çubuklarının uzantılarının dünyanın merkezinde kesişeceğini söyler. Güneş ışınlarının birbirine paralel olduğu bilinmektedir. Güneş ışınlarının Aswan'a dik



olduğu anda İskenderiye'deki çubukla güneş ışınlarının yaptığı açıyı ölçer ve yaklaşık "7,2" derece bulur. Bu açı aynı zamanda merkezil açıya eşittir. Oran kullanarak; "7,2/360 = 5000/çevre" ile "Ç = 250.000 stadyom" olarak bulur. Bu da bugünkü ölçülerle "40.000 km"ye çok yakın bir değerdir. "Ç=2π*r*" ile de yarıçap bulunur.

SİMETRİ

"Uygulamada matematik" adıyla aldığımız başlıkların tümü matematiğin yaşamsal bağlarının kullanıldığı ama güzelliğin yeterince dillendirilmediği başlıklar. Yaşamda karşılaştığımız simetri "biçim"in en çarpıcı olduğu alanlardır. Bağlı olarak da estetiğin… Yaşamda biçim olarak simetri karşımıza çok çıkar. İnsan vücuduna baktığımızda bile bunu görürüz. İki kol, iki ayak, iki göz … simetriktir. Ama simetrik olmayan biçimler de çoktur. Belki de daha çok. Ama ilgi alanımız yine de simetridir. Onu ararız. Sadece biçimsel de değil. Duygularımızda da, sosyal yaşamımızda da ararız hep simetriyi. Adı denge olur, eşitlik olur bir anlamda. Dengeli yaşam, eşitlikçi düzen bir yaşam özlemidir insanoğlu için. Dengeli diye de dillendirsek, eşitlikçilik diye de dillendirsek bir ideali arayış vardır düşüncelerimizde. Bildiğimiz ya da düşlediğimiz ideallerdir aradıklarımız. O ideale göre biçimlenir denge düşüncesi, eşitlikçilik düşüncesi. İdeal dediğimiz

düşünce bir anlamda iyi olmanın referans değeridir. Matematikte hemen her alanda kullandığımız simetrinin de referans değeri vardır. Simetri noktası, simetri ekseni, simetri düzlemi gibi. Referans değeri yoksa simetri de yoktur. Bu nedenle simetriyi referans değeriyle birlikte ele alırız. Hatta simetri referans değerine göre ele alınır demek sanırım daha doğru.

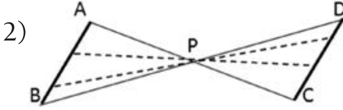
Noktaya göre simetri

1) 

"A'nın P'ye göre simetriği B'dir" demek anlaşılır bir kavram.

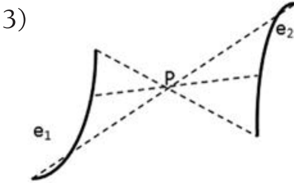
Bu kavram iki temel özelliği içerir: Eşitlik ve doğrusallık. O nedenle "A'nın P'ye göre simetriği B'dir" denildiğinde;

$|\mathbf{AP}| = |\mathbf{PB}|$ ve $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{AP}| + |\mathbf{PB}|$ önermeleri birlikte düşünülür. İlk ve temel adım…

2) 

AB doğru parçasının ([AB]) P noktasına göre simetriği; "[AB]'nin her noktasının P'ye göre simetriklerinin birleşimidir" tanımlamasıyla geometrik yer bağıntısına dönüşür. Bu da; $|AP| = |PC|$ ve $|BP| = |PD|$ eşitliklerine $|AB| = |CD|$ eşitliğini ekler. Çünkü oluşan üçgenler eş üçgenlerdir.

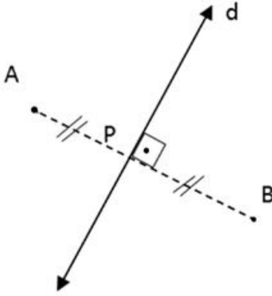
Bir adım daha atalım… Bu kez bir eğrinin bir noktaya göre simetriğini alalım.

3) 

Şekildeki e_1 eğrisinin P noktasına göre simetriği yukarıdaki tanımlamanın geçerliliği ile e_2 gibi bir eğri olur ki buradan da eğrilerin eşliği dışında, oluşan şekillerin eşliği de rahatlıkla görülür. Elbette her düzlemsel şeklin (üçgen, dörtgen, çember vb.) bir noktaya göre simetriği aynı biçimde alınır ve yeni eşlikler oluşur. Her simetride de şekilsel estetikler vardır.

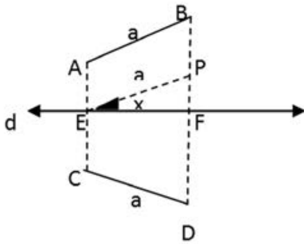
Doğruya göre simetri

1) "A noktasının d doğrusuna göre simetriği B noktasıdır."



Bu kavram içinde yeni bir kavram taşır. Bu da; "A'nın d doğrusu üzerindeki **izdüşümü** P noktasıdır" dediğimiz kavramdır. A'nın "d" üzerindeki gölgesi gibi düşünülebilir. Ancak izdüşüm de genel kavramdır. Biz burada bir anlamda dik gölge diyebileceğimiz, "dik izdüşüm" kavramını kullanacağız. Ve bu nedenle izdüşüm ile dik olma birlikte anılacaktır. Öyleyse; noktanın noktaya göre simetriğine (ki o da $|AP| = |PB|$ ve $|AB|=|AP|+|PB|$ idi), bir de diklik özelliği eklemiş oluyoruz. Yani, "**[AB] ⊥ d**" olacaktır.

2) AB doğru parçasının ([AB]) d doğrusu üzerindeki dik izdüşümü [EF] , d' ye göre simetriği [CD] dir. $|AB| = |CD|$ olduğunu görmek ve kanıtlamak zor değil sanırım. Ama [AB] ile [EF] arasındaki büyüklük ilişkisi incelenmelidir. AB'ye çizilen EP paraleli EPBA paralelkenarını oluşturur ki bu da; $|EP| = |AB| = a$ eşitliğini sağlar.



Şimdi PEF dik üçgenine göre de; $\mathbf{0 \leq |EF| \leq |AB|}$ yazabiliriz.

Yine PEF dik üçgeninde,
$\cos x = |EF| / |EP|$ ve $|EP| = |AB|$ den; "$\mathbf{|EF| = |AB|.\cos} x$" sonucuna ulaşılır.

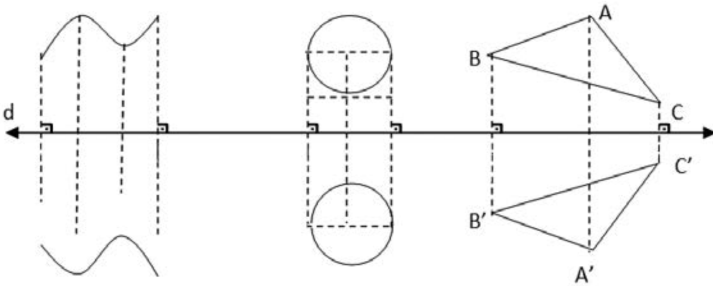
Şimdi yine zaman zaman yaptığımız gibi duralım ve $\mathbf{0 \leq |EF| \leq |AB|}$ önermesi ne anlama gelir, bir çelişki var mı, inceleyelim…

[AB]'nın şekilde görüldüğü haliyle düşünülmeyeceğini biliyoruz. "x" açısı değiştikçe [AB]'nin konumu değişir. Çünkü yaptığımız çizimler taslaktır ve taslak çizim ölçülere göre

yapılmaz. Bu durumda [AB], d doğrusuna paralel olabileceği gibi (bu durumda $|AB| = |EF|$ olur) d doğrusuna dik de (bu durumda da izdüşümü [EF] bir noktadır ve $|EF| = 0$ denilebilir) olabilir. İşte çelişki yaratabilecek saptama bu. Yani noktaya karşılık gelen uzunluğu (!) "0" ile eşlemek… Sanırım [AB] d doğrusuna dik olmaya doğru giderken, $|EF| = k$ nın "0"a gideceğini düşünmek ikna edicidir. Ya da $|EF| = |AB|.\ \mathrm{Cos}x$ bağıntısında ($\cos 90° = 0$ dan), $|EF| = |AB|.\cos 90° = 0$ sonucu bir başka ikna yöntemi olabilir.

Bu tartışmaya özellikle girdim. Sorgulamaya başlayan öğrenci bu gibi noktalarda tereddüt yaşayabilmektedir. Öğrenci algısında çelişki olabilecek bu tür sorular, öğrenme önünde engel olarak karşımıza çıkmaktadır. Elbette bu "1'den 100'e kadar" deyişindeki 100' ü alacak mıyız türünde yapay bir tartışma değil… Burada 100'ü alıp almama tartışması dildeki algılamayla ilgili bir sorun. Öyle bir tartışmaya neden olmamak için "$x < 100$" veya "$x \leq 100$" yazmak en doğrusu…

Şu ana kadar yaptığımız anlatımlardan sonra düzlemde bir şeklin doğruya göre simetriğinin kendisine eş bir şekil olduğunu söyleyebiliriz. Şeklin doğru üzerindeki dik izdüşümünün ise bir doğru parçası olduğunu.

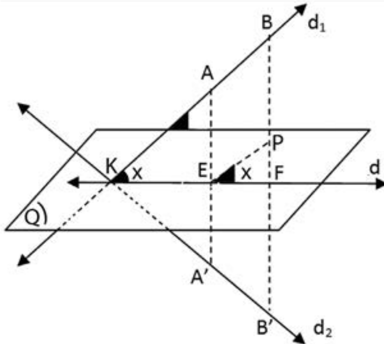


Şeklin konumunun şekilde görülene bağımlı olmadığını, değişik konumlarda düşünülmesi gerektiğini vurgulamak için de aşağıdaki biçimde sorular sorulması yararlı olacaktır.

"ABC dik üçgeninde dik kenar uzunlukları $|AB| = 4$ birim, $|AC| = 3$ birim ise, şeklin bir d doğrusu üzerindeki dik izdüşü-

mü hangi aralıkta değer alır" veya "kenar uzunlukları 6 cm ve 8 cm olan dikdörtgenin bir doğru üzerindeki dik izdüşümü en az kaç cm olur" gibi…

Düzleme göre simetri



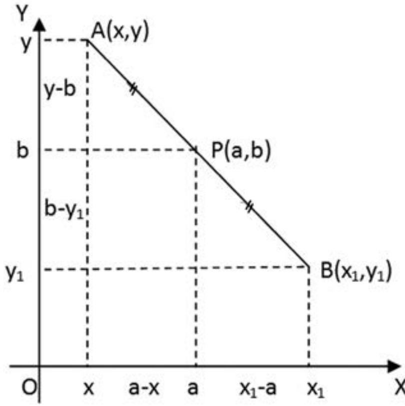
Ayrıntıya girmeden üç boyutlu uzayda simetri ve dik izdüşüm kavramlarını özetleyelim.

- d_1 doğrusu Q düzlemini "K" noktasında kessin.
- d_1'in düzlem üzerindeki izdüşümü (dik gölge gibi) d doğrusudur. ($d \in Q$)
- d_1 ile d doğrusunun oluşturduğu "x"açısı, doğru ile düzlemin yaptığı açıdır. (Ölçek açı)
- d_1 in düzleme göre simetriği d_2 doğrusudur. (d, d_1 ile d_2 nin açıortayı)
- $A \in d_1$ ve $B \in d_1$ noktalarının simetrikleri d_2 doğrusu üzerindeki A´ ve B´ noktalarıdır. ($|AE| = |EA'|$, $|BF| = |FB'|$ ve $|AB| = |A'B'|$)
- [AB]'nin düzlem üzerindeki izdüşümü [EF] dir. EP, AB'ye paralel çizildiği için m(PEF) = x dir. ($|EF| = |AB|.\cos x$)

Eteğimizdeki taşları döker gibi davrandığımızı biliyorum. R^3 uzayında doğrular, düzlemler, cisimler ayrıntılı bir konu. Ayrıca üç boyutlu düşünmenin zorlayıcı güzellikleriyle dolu. Biz burada sadece "simetri düzlemi" olan "Q"nun temel marifetlerini sıraladık. Bir anlamda da iki boyutu üç boyuta taşıdık.

Geometrik yer olarak simetri

Bir noktaya göre simetrinin analitik biçimlenişini daha önce inceledik. Ve noktanın noktaya göre simetriğinin genellemesiyle her bağıntının simetri denklemlerinin yazılabileceğini gördük. Şimdi de noktanın noktaya göre simetriğinin nasıl üretilebileceğini analitik düzlemde anımsayarak başlayalım.



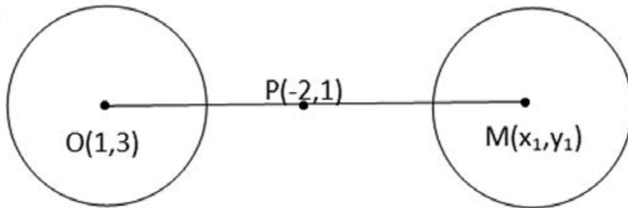
[AB]'nin orta noktası "P" olduğu için |AP| = |PB|'dir. A, P, B noktalarından eksenlere indirilen dikmeler de eş uzunluklar oluşturacağı için, Ox ekseninde; x_1–a = a–x'den 2a = x_1+x ve $\boldsymbol{x_1 = 2a-x}$ olur. (Thalesse bağıntıları) Oy ekseninde; y–b = b–y_1'den 2b = y_1+y ve $\mathbf{y_1 = 2b - y}$ olur. (Thalesse bağıntıları)

Sonuç olarak B(x_1,y_1) noktaları B(2a–x,2b–y) biçiminde yazılabilir. Bir başka deyişle A ve P belliyse A'nın aynı doğrultuda P kadar ötelenmiş hali olan B noktası bulunabilir. Elbette bu, iki nokta belli ise diğer nokta bulunur diye de genellenebilir.

Yukarıdaki gibi soyut anlatım her öğrenci tarafından kolay kavranmaz. Yazılan eşitliklerin açıklanması gerekebilir. Eğer anlatım için bu yolu izlemişsek örnek veya örneklerle kavrayışın pekiştirilmesi gerekir. Örnekler bir noktaya göre simetrinin genellemesini içermelidir.

O zaman O(1, 3) merkezli "r" yarıçaplı çemberin P(–2, 1) noktasına göre simetriği olan çembere kolaylıkla geçiş yapılabilecektir.

Örnek:



$(x_1 + 1) / 2 = -2$ den $x_1 = -5$
$(y_1 + 3) / 2 = 1$ den $y_1 = -1$ ve
M(-5, -1) den denklemler;

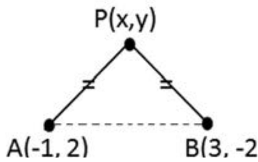
$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$

$(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = r^2$ olacaktır.

Sıra geldi doğruya göre simetrinin analitik olarak ele alınmasına. Ama önce simetriye konu olan doğrudan yani "simetri ekseni"nden başlayalım. Geometrik yerden söz ederken, "belirli iki noktadan eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri bir doğrudur" denilir. Elbette düzlemde…

Soru: A(–1, 2) ve B(3, –2) noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yer denklemi nedir?

Çözüm 1) İlk çözümümüz saf bir geometrik yer sorusu çözmek biçiminde olsun. Yani elde edilecek analitik ifadenin denklem olarak ne olacağını bilmediğimizi düşünelim.



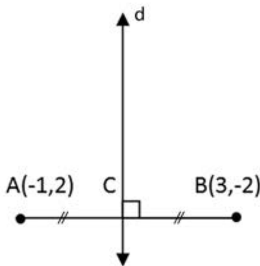
P(x, y) verilen özelliği taşıyan her nokta olmak üzere; $|PA| = |PB|$ eşitliği , iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}$$

şeklinde yazılır.

Her iki yanın ve parantezlerin kareleri alınarak;
$x^2+2x+1+y^2-4y+4 = x^2-6x+9+y^2+4y+4$ eşitliğinden $8x-8y-8 = 0$ ve tüm terimler 1/8 ile çarpılarak "$x-y-1 = 0$" doğru denklemi elde edilir. Yukarıdaki PAB ikizkenar üçgeni incelenerek bu doğrunun "AB" doğru parçasının orta dikme doğrusu olduğu yorumu yapılır. Ve bu doğru [AB] tabanlı tüm ikizkenar üçgenler için simetri eksenidir.

Geometrik yerin [AB]'nin orta dikme doğrusu olduğu görülüyorsa, çözüm;



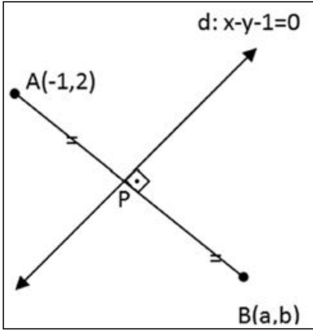
- $|AC| = |CB|$'den
  C [(–1+3)/2, (2–2)/2] = **C(1,0)** olur.
- $m_d.m_{AB} = -1$ ve $m_{AB} = \dfrac{2+2}{-1-3} = -1$'den,
  $m_d.(-1) = -1$ ve $\boldsymbol{m_d = 1}$ bulunur.
- Eğimi "1" ve bir noktası (1,0) olan doğru denklemi "$y-y_1 = m(x-x_1)$" bağıntısı kullanılarak;

$y - 0 = 1.(x-1)$ ve $\boldsymbol{x - y - 1 = 0}$ olarak elde edilir.

Sorunun amacı “simetri ekseni” kavramını ortaya koymaktı. Bunu yaptık. Yine aşamalara devam edelim ve bir genellemeye ulaşıp ulaşamayacağımızı görelim. Yine örnek sorularla…

Soru: A(– 1, 2) noktasının d: $x - y - 1 = 0$ doğrusuna göre simetriği olan nokta nedir?

Çözüm: Önce taslak. Sonra yorum…



$[AB] \perp d$ ve $|AP| = |PB|$ olduğu açıktır. Ne yapılabilir?

1) Noktanın doğruya olan uzaklığı olabilir mi?

$$|AB| = |PB| \Rightarrow \frac{|-1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a-b-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \text{den } |a-b-1| = 4$$

elde edilir. Elde edilen denklem çifti ile “a” ve “b” noktalarını bulamayız. $(a, b) \leftrightarrow (x,y)$ dönüşümü yapılırsa denklemler; “$x–y–5 = 0$” ve “$x–y+3 = 0$” olacaktır.
Nedir bu? “d: $x–y–1 = 0$” doğrusuna paralel olan bu denklemler...

Sanırım A ve B noktalarından geçen ve “d”ye paralel olan doğru denklemleri olduğunu gördünüz. Ama sonuç başarılı değil. B noktasını bulamadık. Aramaya devam edelim… Edelim de! Benim içime sinmedi. Elde edilen denklemlerin “A ve B’den geçen d’ye paralel olan denklemler” olduğunu gördünüz dedim. Biraz görev savdım… Açalım.

Yukarıda $|AP| = |PB|$ eşitliğini analitik olarak yazarak denklemleri elde ettik.

Aslında, $|AP| = \frac{|-1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$ (noktanın doğruya olan uzaklığı) olarak belli. $|BP| = 2\sqrt{2}$ eşitliğine göre yazdığımız denklem bizi "d" doğrusundan $2\sqrt{2}$ birim uzaklıktaki noktaların geometrik yer denklemlerin götürdü. Koşulu sağlayan iki denklem A'dan ve B'den geçen iki paralel doğru olacaktır. Yukarıda elde ettiğimiz denklemler bunlardı. Beyhude bir çabaydı... Şimdi aramaya devam edebiliriz.

2) Aritmetik ortayı kullanarak P noktasını "a" ve "b" türünden yazsak ve p∈d olduğu için "d" de uygulasak?.. Yapalım ve bakalım...

$P = (\frac{a-1}{2}, \frac{b+2}{2})$ olur. "d: x–y–1 = 0"da x ve y yerine konulur ve $\frac{a-1}{2} - \frac{b+2}{2} - 1 = 0$ ve düzenlenirse "a–b–5 = 0" denklemi elde edilir. Yine yetersiz, yine başarısız…

Peki, bu denklem nedir? $(a, b) \rightarrow (x, y)$ dönüşümünü yaparsak denklem; "$x - y - 5 = 0$" olacaktır. Bunu az önce de elde ettik. Denklemin B'den geçen ve "d" ye paralel olan denklem olduğu bu kez açık. Ama yine başaramadık… Zor görünmüyordu oysa pek de kolay değilmiş!

Başaramayacağımızı elbette biliyordum. Bildiğim halde üşenmeden (aslında üşendim ama yapmalıydım) iki ayrı denemede bulundum. Bu tutumla çok karşılaştığımız için üzerinde durmalıyız. Öteden beri söylediğimiz şu: Bir soruyu çözmeye başlamadan önce soruyu anlamak ve çözümü tasarlamak önemli. Bunun için de yol açıcı soru, "neyi bilirsem B' ye ulaşırım" sorusudur. Eğer daha başında bu soruyu sorarsak "P" yi (ki o da A' nın izdüşümüdür) bulmamız halinde B' ye kolaylıkla ulaşabileceğimiz açıktır. O zaman,

3) "P" noktasını bulalım. P noktası "d" ile "AB" doğrularının kesişim noktasıdır. Ortak çözüm yapılarak bulunacaktır. Ama önce AB doğrusunun denklemi bulunmalıdır. Adım adım gidelim.

a) AB, (–1, 2) noktasından geçiyor. Eğimini bilirsek, doğru denklemini yazabiliriz. AB ve d doğruları dik olduğundan, $m_{AB}.m_d = -1$ ve $m_{AB} = 1$ ($y = mx$+n ve d: $x–y–1 = 0 \rightarrow y = x–1$'den) $1.m_d = -1$ ve $m_d = -1$ olur.

$y–y_1 = m.(x–x_1)$'de $m = 1$ ve (–1, 2) uygulanarak,

$y - 2 = (- 1).(x+1)$ den $x + y - 1 = 0$ bulunur.

b) $x - y - 1 = 0$

$x + y - 1 = 0$ denklem sistemi çözülerek, $x = 1$ ve $y = 0$ yani P(1, 0) bulunur.

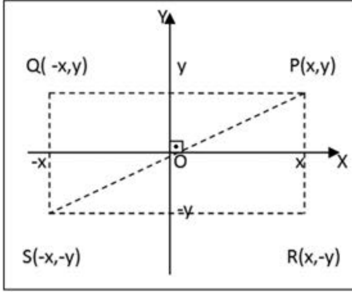
c) A(-1, 2) P(1, 0) B(a,b) P, [AB] nin orta noktası. Aritmetik ortadan;

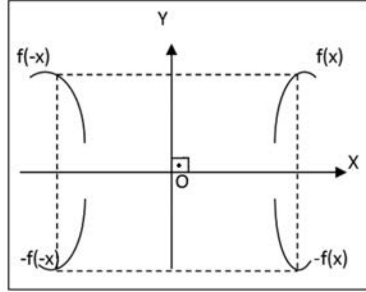
$$\frac{-1+a}{2} = 1\text{'den } a = 3,\ \frac{2+b}{2} = 0\text{'dan } b = -2 \text{ ve B(3, –2) olur.}$$

Sonucu bulduk. Bulduk ama bu sonuç mutlu son mu?

Biliyorum… Yaptıklarımız hiç de rahatlatıcı değil. Önce, ilk iki denemede bulunduk. Başaramadık. Hatamızı da saptadık: Doğru tasarımda bulunmamak! Üçüncü çözümde doğru tasarımda bulunduk. Ama o da ancak üç aşamada bizi sonuca götürdü. Soruyu çözmek bir yana, bir genellemeye ulaşmak da zor görünüyor. Yani matematiğin hem basitlik, hem de genelleme ilkelerine uygun değil. O nedenle herhangi bir eksene göre simetriden vazgeçelim. "Özel doğrulara göre simetri alınabilir mi" onu inceleyelim. Simetri ekseni, koordinat eksenlerine paralel doğrular veya açıortay doğruları olsun. Öncelikle de, Ox ve Oy doğruları.

İnceleme:

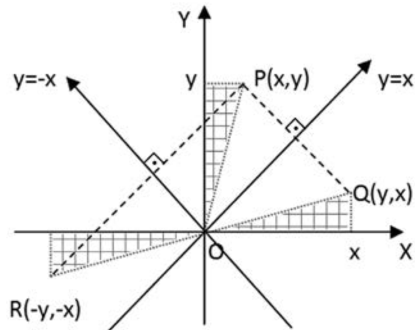




Birinci şekilde P(x,y) noktasının eksenlere göre simetrik noktalarını gösterdik. İkinci şekilde bir fonksiyon ya da genel anlamda bağıntının eksenlere göre simetriklerinin genellemesine ulaşılabileceğini gösterdik. Anlaşılırlık noktasında daha önce yaptığımız çalışmalara güveniyoruz. İkinci şekil bize bir bağıntının simetriği olan yeni bağıntılara apsis (x) ve ordinat (y) değerlerinin değişimleriyle ulaşılabileceğini göstermektedir.

Şimdi de "$y = \pm x$" (açıortay) doğrularına göre simetri kavramlarını inceleyelim.

İnceleme:



Hipotenüsü PO, QO, RO olan ve eksenlerle oluşan üçgenlerin eş üçgenler olduğunu, OPQ üçgeninde $y = x$ ve OPR üçgeninde $y = -x$ doğrularının simetri ekseni olduğunu görmek zor olmasa gerek. Eşliklerin sonucunda ise;

* P(x, y) nin $y = x$'e göre simetriği Q(y, x)

* P(x, y) nin $y = -x$'e göre simetriği R($-y$, $-x$) elde edilir.

Bu saptama da bir genellemedir. Öyleyse fonksiyonlara da uygulanabilir.

Örneğin; $2x–3y +5 = 0$'ın "$y = x$" e göre simetriği "$x \to y$" ve "$y \to x$" dönüşümü ile $2y–3x+5 = 0$ dır. x ile y'nin yer değiştirdiğini görünüz.

Yine $2x–3y+5 = 0$'ın "$y = –x$" e göre simetriği "$x \to –y$" ve "$y \to –x$" dönüşümü ile $–2y–3(–x)+5 = 0$ dan $2y–3x–5 = 0$ olarak elde edilecektir.

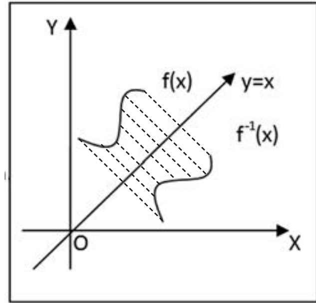
Birinci açıortay dediğimiz "$y = x$" doğrusuna göre simetride "x" ile "y"nin yer değiştirmesi bazı çağrışımlar yapmış olmalı…

Örneğin, $y = 3x+5$ ya da $f(x) = 3x+5$ in simetriği "$x = 3.f(x)+5$" olacaktır. Bu önermeyi $f(x)$' e göre düzenlersek;

"$f(x)=\dfrac{x-5}{3}$" elde edilir… Hiç yabanıl değil değil mi?

"$f(x) = 3x+5$" in tersi de $f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{3}$ olarak bulunuyordu.

Elbette sürpriz değil. Bir fonksiyonun ya da genel anlamda bağıntının tersi alındığında tanım ve değer kümeleri değişiyordu. Bir başka deyişle "x" ile "y" değerleri yer değiştiriyordu.



Bu da bize $f(x)$'in "$y = x$" e göre simetriğinin $f(x)$ fonksiyonunun tersi olduğunu göstermektedir. İşte şimdi bu aşamada ikinci dereceden $f(x) = ax^2 +bx+c$ fonksiyonun tersinin nasıl alınacağı ve tersinin fonksiyon olup olmadığı ya da hangi koşullarda fonksiyon olabileceği irdelenebilir. Şekil çizerek daha gerçekçi daha anlaşılır biçimde tartışılabilir. Biz bu yola sapmayalım.

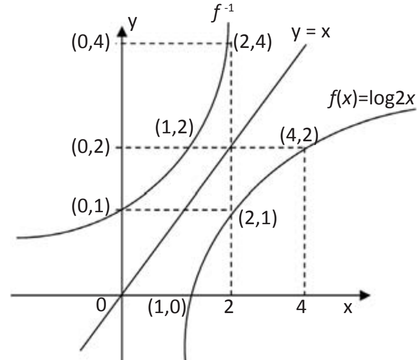
Ters fonksiyona iyi bir örnek olan üslü fonksiyon-logaritma fonksiyonu ilişkisini ele alalım. Elbette bu örnekleme logaritma fonksiyonu incelenirken de yapılabilir. Hatta iyi bir kavrayış için kaçınılmazdır. Ama gelin biz bu güzelliği sırası gelmişken kaçırmayalım.

İnceleme: Üslü çoklukların başka bir anlatımı olarak logaritma: "$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$" biçiminde ortaya konur. Yani üslü fonksiyonun logaritma fonksiyonu olarak gösterimi…

"$y = \log_a x$" fonksiyonunun tersi alındığında "$x = \log_a y$" olacaktır ki, "$x = \log_a y$" fonksiyonu üslü biçimde "$y = a^x$" şeklinde yazılır. Buradan da; "$f(x) = \log_a x$"in tersi "$f^{-1}(x) = a^x$"tir denilebilir. Örnek olarak $f(x) = \log_2 x$ ve tersi olan $f^{-1}(x) = 2^x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. Tablolarını yaparak.

x	0	1	2		4	...
$f(x) = \log_2 x$	| |	0	1		2	...

x	0	1	2	3	4	...
$f^{-1}(x) = 2^x$	1	2	4	8	16	



$(0,1)\leftrightarrow(1,0)$, $(1,2)\leftrightarrow(2,1)$, $(2,4) \leftrightarrow (4,2)$ dönüşümleri; $f(x)$ ile $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının $y=x$' e göre simetrik olduğunu apaçık gösteriyor.

Ancak bunca uğraşının ardından bu sonuçla yetinmek hiç doğru değil. Grafik; devinimi, değişimi ve düzeni içinde taşır. Bu anlamda grafik çizmek "amaç" olma ötesinde anlam taşır. Görselliği anlaşılırlığa dolayısıyla basitliğe, düzeni estetiğe, değişimi genellemeye açıktır.

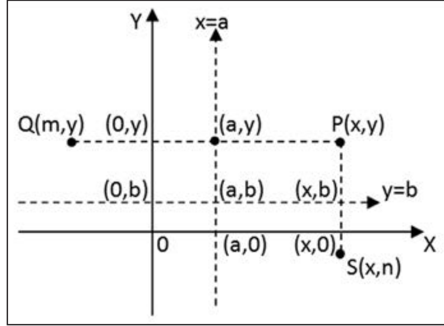
Bu nedenlerle çizdiğimiz grafiği, "neden negatif sayılar için logaritma değeri yok", "neden (0,1) aralığında $f(x) \leq 0$", "neden $\lim_{x\to 0}(f(x) = -\infty$", "neden $x \in R$ için $f^{-1}(x) \geq 0$", "neden $(x \to -\infty)$ için $f^{-1}(x) = 0$" vb sorularından mahrum bırakamayız? Grafikle birlikte bu sorulara yanıt aramazsak bütünlüklü ve kalıcı öğrenme gerçekleşmeyeceği gibi, fonksiyonun güzellikleri de görülemez… Söylediklerime "hangi zamanda bunları yapacağız" karşı çıkışları geleceğini biliyorum. Belirli ölçüde hak da veriyorum.

Bu bir yanıyla matematik programlarının düzenlenmesi sorunu… Daha önce de söylediğim gibi matematik "yararlı" matematiğe sıkıştırılmış durumda. Matematik estetiği ihmal ediliyor. Ancak bu olumsuzluğa karşın söylediklerim yapılabilir. Çok soru çözerek belletme yerine anlamlı öğrenmeyi öne çıkarmak "zaman" sorununu lehimize dönüştürecektir.

Doğruya göre simetrinin geometrik yer incelemesini, koordinat eksenlerine paralel doğrulara göre inceleyerek bitirelim.

İnceleme:

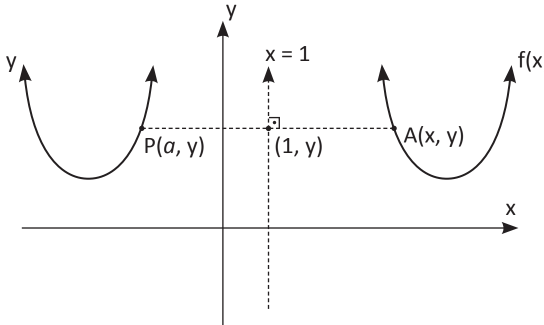
P(x, y) nin $x = a$'ya göre simetriği Q noktası olsun. P ve Q noktalarının simetri merkezi (a, y) dir ve Q için ordinatın y olduğu şekilden görülür. Apsis değeri "m" ise, $\frac{m+x}{2} = a$'dan



"$m = 2a–x$" dir. Benzer düşünüşle P(x, y) nin $y = b$'ye göre simetriği S(x, n) gibi bir nokta olur. (x, b) noktası P ile S'nin simetri merkezidir. Buradan da $\frac{y+n}{2} = b$'den $n = 2b - y$ olacaktır.

Bu sonuçları fonksiyonlara uygulayarak genellersek;

$f(x)$' e ait her A(x, y) noktasının x=1'e göre simetriğinin her noktası P(a,y) olsun.



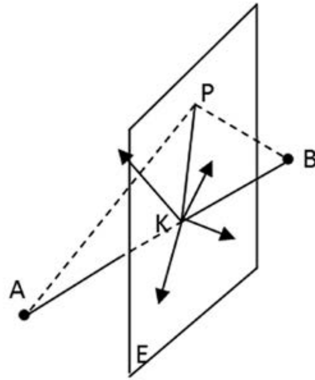
$\frac{a+x}{2} = 1$'den $a = 2–x$ olur. $f(x)$'in simetriği olan "y" fonksiyonu da $y = f(2–x)$ olacaktır.

Yani $f(x) = 2x^2 +3x +7$ fonksiyonunun "$x = 1$"e göre simetriği ($x \rightarrow x–2$) ile $y= f(x–2) = 2.(x–2)^2 +3.(x–2)+7$ ile bulunacaktır.

Üç boyutlu uzayda düzlemi "simetri düzlemi" diye adlandırdık ve bazı özelliklerinden kısaca söz ettik. Bu kez bir geometrik yer sorusuyla analitik uzayda durumu görelim.

Soru: A(1, –2, 3) ile B(2,1,4) noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yer denklemini yazınız.

Çözüm: Önce yorumlayalım. Üçboyutlu uzayda A ve B'den eşit uzaklıktaki "P" noktaları, PAB ikizkenar üçgenleri (|PA|=|PB|) oluşturur. Öyleyse P noktaları [AB]'nin orta noktası olan "K"dan çizilen orta dikme doğruları üzerindedir. Bu dikmeler her yönlü düşünüldüğünde bir düzlem oluşturur. Bu düzlem [AB]'nin orta dikme düzlemidir…



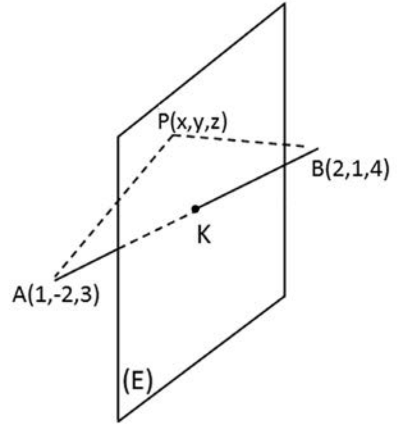
Şimdi gelelim (E) düzlemini oluşturan P noktalarının analitik ifadesine... A(1, –2, 3) ve B(2, 1, 4) de olduğu gibi P noktası da üç bileşeniyle P(x, y, z) biçiminde gösterilecektir. Noktayı iki boyuttan üç boyuta taşırken olduğu gibi iki nokta arasındaki uzaklığı da iki boyuttan üç boyuta taşımalıyız.

Uygulamasını yapalım.

|PA| = |PB| önermesi analitik olarak yazılırsa;

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$$

ve her iki yanın karesi alınır parantezli işlemler yapılırsa düzenleme sonucunda; $2x–6y–2z+7 = 0$ denklemi elde edilir. Ne aradığımızı biliyorduk. Bulduğumuz denklem düzlem denklemiymiş! Görüldüğü gibi R^2 de $P(x,y)$ olan nokta, R^3 de $P(x,y,z)$'ye,



$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ formülü,

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$

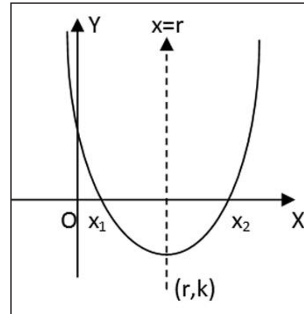
formülüne "$ax+by+c = 0$" olan doğru denklemi, "$ax+by+cz+d = 0$" düzlem denklemine dönüştü…

Kısaca boyut atladık… Elbette R^3 uzayında doğru denklemi, düzlem denklemi ve diğer analitik işlemleri ele almak ayrıntılı bir çalışma. Bizim yaptığımız üç boyutlu uzayda düzlemin simetri düzlemine dönüşümünü ortaya koymaktı.

Fonksiyonlarda simetri

Bir fonksiyonun bir noktaya ya da bir eksene göre simetriği dışında bazı fonksiyonların kendi iç simetrileri de vardır. Onlar da fonksiyonlara ayrı bir özellik ayrı bir güzellik katar. Örneğin ikinci dereceden fonksiyonlar simetriktir deriz. Arkasından şu soru gelir: Neye göre?

Şekil bize hemen gösterir "$x = r$" nin simetri ekseni olduğunu. Ardından da "$\frac{x_1+x_2}{2}=r$" olduğunu görürüz.

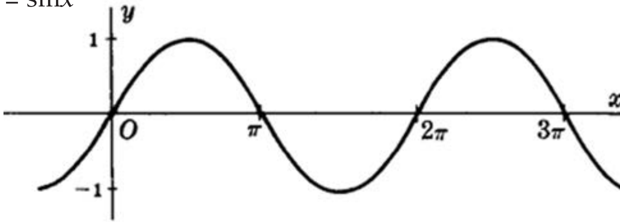


Grafiği çizmek için kullandığımız tabloda bu özellik daha da çarpıcı biçimde görülür.

x	$r-\|a\|$	r	$r+\|a\|$
y	y_1	k	y_1

Trigonometrik fonksiyonlarda da görürüz simetrikliği.

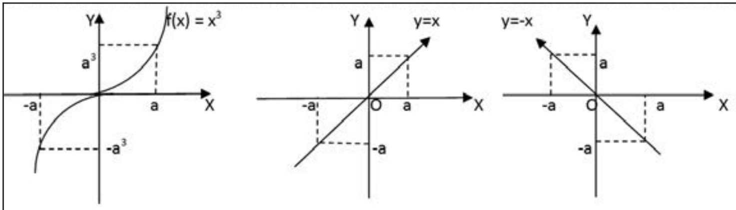
$y = \sin x$



Trigonometrik fonksiyonlar periyodiktir. Periyodik fonksiyonlar belirli aralıklarda kendini yineler. $y = \sin x$'in periyodu "2π"dir. Yani her 2π için grafik yinelenir. O nedenle simetri özelliği oldukça zengindir. Örneğin her k∈Z için "$x = k.\pi + \frac{\pi}{2}$" fonksiyonun simetri eksenidir. Yine her k∈Z için "kπ" simetri merkezidir. Hatta "$f(x) = -f(-x)$"dir. Ki buna da tek fonksiyon denildiğini biliyoruz.

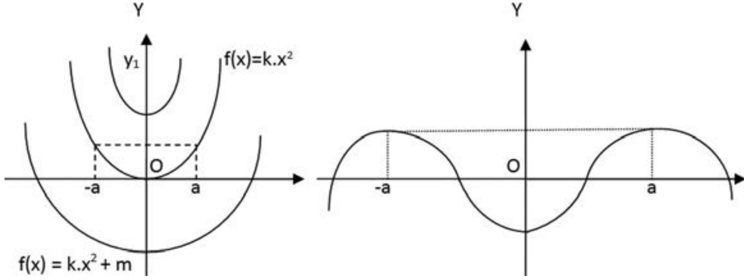
Madem söz ettik öyleyse "$f(x) = -f(-x)$" fonksiyonunu da anımsayalım. Söyledik. Bu koşulu sağlayan fonksiyonlara tek fonksiyon diyoruz. Biraz daha anlamlı hale getirelim. "$f(x) = -f(-x)$" olduğuna göre örneğin f(3) = 5 ise f(–3) = –5 olmalı. İkililer biçiminde gösterirsek noktalar; (3,5) ile (–3,–5) olmaktadır. Genellersek; $f(m) = k$ ise, $f(-m) = -k$ yani (m,k) ve $(-m,-k)$ ilişkisi kurulmaktadır. Bu koşulu sağlayan noktaların orijine göre simetrik olduğunu anımsayınız. Tek fonksiyona bir örnek verelim.

Tek fonksiyonun en iyi örneği; $f(x) = x^3$ gibi gelir bana. Her zaman "$f(a) = -f(-a)$" koşulunu sağlar.



Tek fonksiyon olduğuna göre, çift fonksiyon da olmalı. Çift fonksiyon; $f(x) = f(-x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlardır.

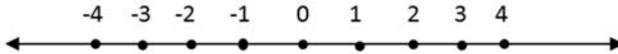
Yani "$\forall(x_1,y_1) \in f(x)$ için $(-x_1, y_1) \in f(x)$" ise fonksiyon çifttir denir. $f(x) = k.x^2+m$ veya $f(x) = x^4+k$ gibi.



Çift fonksiyonlarda Oy (x = 0 doğrusu) ekseninin simetri ekseni olduğu sanırım rahatlıkla görülmektedir.

Sayılarda simetri

Sayı doğrusu üzerinde "0" simetri merkezidir. "2 ile –2", "5/2 ile –5/2", "$\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$", "$-5-\sqrt{2}$ ile $5+\sqrt{2}$" orijine göre simetriktir. Bunun ötesinde sayı doğrusu üzerinde her sayı simetri merkezi olarak alınabilir. Örneğin; "3" simetri merkezi olarak alınırsa "3+5 = 8" ile "3–5 = –2" birbirinin simetriğidir. Çünkü (8–2) / 2 = 3 olmaktadır. Yani iki "sayının aritmetik ortası, o sayılar için simetri merkezidir" denilebilir.



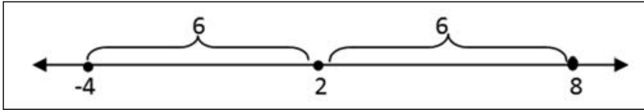
Aynı özellik karmaşık sayılar için de geçerli. "$x+yi$" karmaşık sayısının reel eksene göre simetriği "$x-yi$"dir ki, bu da karmaşık sayının eşleniğidir. İkinci dereceden bir denklemin kökleri gibi. İkinci dereceden denklemin (elbette varsa) kökleri ($f(x) = ax^2+bx+c$'nin Ox eksenini kestiği noktalarda) "$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$" idi. Kökler de simetriktir. Neye göre sorusunu da tepe noktasının apsis (r) değerine göre diye yanıtlamıştık. "$r = (x_1+x_2) / 2$" idi.

Denklemlerden söz etmişken mutlak değerli denklemleri de anımsayalım. Örneğin;
$|x–2| = 8$ denkleminin kökleri; $x \geq 2$ için $x–2 = 8$,
$x = 10$ ve $x < 2$ için $–x+2 = 8$'den $x = –6$ idi.

10 ile –6 neye göre simetriktir sorusunun yanıtı ise $x = (10–6)/2$ den $x = 2$ idi. Yani $|x–2| = 0$ için bulunan ayraç değeri… Bu da bizi mutlak değer ile verilen denklem çözümlerinde neden mutlak değeri "0" yapan sayıları referans değeri olarak aldığımızı anlamlandırmaya götürür.

Örneğin:

$|x–2| = 6$ denklemini çözmeye, "$x–2 = 0$ dan $x = 2$" değerini bularak başlarız. Bulunan "x" değeri, bulunacak kökler için referans değeridir. Bir başka deyişle simetri merkezi. Eşitliği sağlayan "x" değerleri (denklemin çözüm kümesinin elemanları); 2'nin 6 fazlası (2+6 = 8) ile, 6 eksiği (2–6 = –4) olacaktır. Bu nedenle ilk aşamada, "$x–2 = 0$ ile $x = 2$"yi, daha sonra;
$x \geq 2$ için $x–2 = 6$ dan, $x = 8$'i ve
$x < 2$ için $–x+2 = 6$ dan, $x = –4$' buluruz.



Görüldüğü gibi, her reel sayının başlangıç noktasına göre simetriği olduğu gibi, her x_1 ve x_2 gibi iki reel sayı $(x_1+x_2)/2$ için simetriktir.

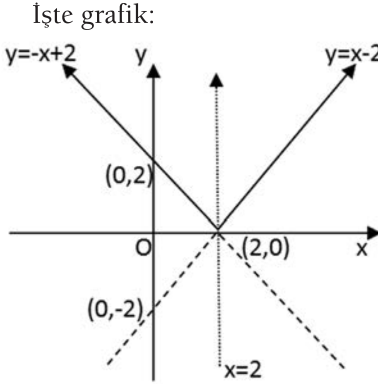
Mutlak değerle başlamışken devam edelim. Yukarıdaki eşitlikte "6" yerine "y" yazılsa ne olur?

$y = |x–2|$ fonksiyonu olur. Ama sıradan değil. Özellikli bir fonksiyon…

İlke belli. Önce referans değeri bulunacak, sonra referans değerine göre basit fonksiyonlar elde edilecek ve grafik çizilecek.

"$x–2 = 0$ dan $x = 2$"
a) $x \geq 2$ için, $y = x–2$ ve
b) $x < 2$ için, $y = –x+2$

İşte grafik:



Önceki örnekte referans değeri $x = 2$ noktasıydı. Bu örnekte ise referans değeri $x = 2$ doğrusuna dönüştü. Bir anlamda boyut değiştirdi. $y = |x–2|$ parçalı fonksiyon olarak yazıldı. Grafik de x'in 2'den büyük değerleri için $y = x–2$ ve x'in 2'den küçük değerleri için $y = –x+2$ fonksiyonları olarak çizildi.

$|x–2| \geq 0$ olduğu için, $|x–2|$'ye eşit olan "y" de her zaman "0" veya pozitif, yani $y \geq 0$ biçiminde olacaktır.

Başladık, yine devam edelim…

"$|x–2| = 6$"yı "$|x–2| = –6$"ya dönüştürelim ve çözüm arayalım.

"$x–2 = 0$ dan $x = 2$"yi simetri merkezi olarak bulup, "$2+(–6) = –4$" ve "$2–(–6) = 8$" ile $–4$ ve 8 sonuçlarını buluruz. $|x–2| = 6$ denklemini çözdüğümüzde de aynı sonuçları bulmuştuk. Ne yani, $|x–2| = 6$ ile $|x–2| = –6$ denklemleri aynı şeyler mi? Şüpheli… En doğrusu ilkeli çözüm.

"$x–2 = 0$ dan $x = 2$" bulduktan sonra;

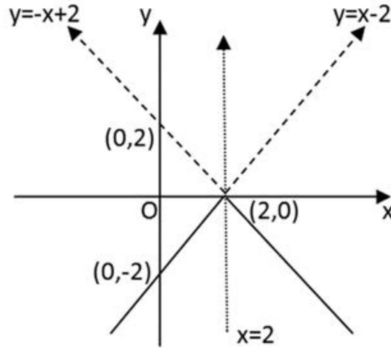
a) $x \geq 2$ için $x–2 = –6$ dan $x = –4$ bulunur. Ne demek "2" den büyük sayılar için "–4" bulmak? Elbette yanlış… Olamaz.

b) $x < 2$ için ise $–x+2 = –6$ dan $x = 8$ bulunur ki bu da olanaksız. Çünkü 8, 2'den küçük değil.

Aslında $|x–2| = –6$'yı çözmeye yeltenmekle hata yaptık. Biliyoruz ki; $|x–2| \geq 0$'dır. Daha genel söylersek: "$|ax+n| \geq 0$"dır. Çünkü "sayının mutlak değeri, başlangıç noktasına uzaklığı" idi. Bu yanlışı düzelttikten sonra, $|x–2| = y$ denklemini, $|x–2| = –y$ durumuna getirip grafiğini çizmeye çalışalım. Ancak bu kez ilkeli davranmayı "pratik"liğe feda etmeyelim.

"$y = -|x-2|$" fonksiyonunun referans değeri yine, "$|x-2| = 0$ dan $x = 2$"dir. Denklem;
a) $x \geq 2$ için $y = -(x-2)$ den $y = -x+2$ ve
b) $x < 2$ için $y = -[-(x-2)]$ den $y = x-2$'ye dönüşür.

Grafiği istenen koşullara uygun olarak çizdiğimizde, $x = 2$ doğrusunun simetri ekseni olduğunu ve grafiğin "y < 0" değerleri için gerçekleştiği görülecektir. Daha önce çizdiğimiz $y = |x-2|$'nin Ox'e göre simetriği...

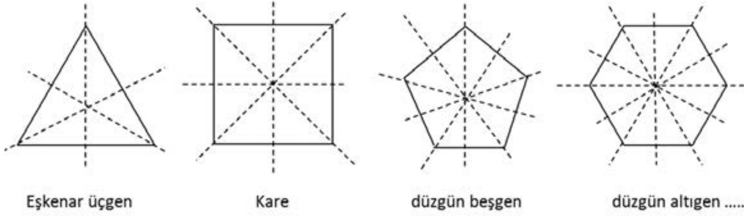


Sonuç olarak mutlak değerle verilen denklemlerde ya da fonksiyonlarda simetri merkezi dediğimiz referans değerini (ya da değerlerini) bulmak ve o değerlere göre davranmak temel ilke olmalıdır. Örneğin denklem, $|x^2-4| = k$ gibi bir denklem ise, "$x^2-4 = 0$" ile "-2" ve "2" gibi iki kök bulduktan sonra;
a) $x < 2$, b) $-2 < x < 2$, c) $2 < x$ olmak üzere,
üç ayrı bölgede denklem çözümü yapılacağı açıktır. Aynı şey "$y = |ax^2+bx+c|$ gibi fonksiyonların grafiklerinin çiziminde de yapılmalıdır. Asıl vurgulamak istediğimiz ise, pratik çözümün cazibesine fazla kapılmamak gerektiğidir. Özellikle "x ekseninin altında kalan kısmı yukarı kaydırın" gibi kolaycı yaklaşımlar hem kavramayı engellemekte, hem de önemli hatalara yol açmaktadır.

Geometride simetri

Geometrinin inceleme konusu yaşamdaki şekil ve cisimlerdir. Geometri bunların içinde en çok, düzgün olanları ile uğraşır. En kolay görünebilen simetri özellikleri de düzgün şekil ve düzgün cisimlerdedir. O nedenle özellikle düzgün çokgen dediğimiz düzlemsel şekiller simetri merkezi ve simetri eksenleriyle ele

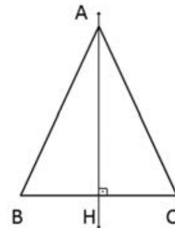
alınmalıdır. İki nedenle. Birincisi kavrayışı güçlendirir, anlaşılırlığı kolaylaştırır. İkincisi şekillerdeki güzelliği yani estetik yapıyı ortaya koyar.



Şekiller çoğaltılarak çembere kadar götürülebilir. Düzgün çokgenlerde kenar sayısı kadar açı ve kenar sayısı kadar simetri ekseni vardır. Simetri eksenleri bir noktada kesişir ve kesişim noktası "simetri merkezi" olarak adlandırılabilir. Her birinde simetri eksenlerinin ürettiği; eş açılar, eş şekiller, eş doğru parçaları ve elbette eş alanlar oluşur. Dikliklerle birlikte izdüşüm kavramı da kullanılır. İşte bu özellikler hazırlanan soruların içeriğini belirler, soruları zenginleştirir. Bu nedenle bilinmeli ve gözlenmelidir.

Düzgün çokgenler serüvenini çembere dek götürebiliriz. Hatta çembere düzgün çokgenlerin en gelişmişi en mükemmeli diyebiliriz. Çemberde her çap simetri eksenidir. Merkezi de simetri merkezidir. Nasıl ki eşkenar üçgenin, karenin… ayırt edici özellikleri simetri özelliği ile belirlenirse, çemberin de tüm özellikleri (teğet, kiriş, çevre, alan…) simetri merkezi ve çapla ilişkilendirilir, kavranır.

Düzgün şekillerdeki simetri ekseni kadar zengin olmasa da birçok geometrik şekilde de simetri ekseni bize özellikler sunar. Örneğin ikizkenar üçgenin özellikleri simetri ekseni çıkışı ile çok daha kalıcı kavranacaktır.



[AH] simetri ekseni ise hemen;
$[AH] \perp [BC]$, $|HB| = |HC|$, $|AB| = |AC|$, $m(ABC) = m(ACB)$, $m(BAH) = m(CAH)$, Alan(ABH) = Alan (ACH) özellikleri ortaya çıkmaktadır.

Bu nedenle geometrik şekillerin incelenmesinden (özellikle düzgün olanlar) önce, simetri ekseni ve ürettiği özelliklerin kavratılması yararlı olmaktadır. Bu kavrayışın devamında anılan özellikler öğrenciler tarafından kolaylıkla üretilebilmektedir. Anlamlı ve kalıcı bilgiye dönüşmektedir.

Düzlemdeki simetrik özellikler uzayda da bir düzen yaratmaktadır. Özellikle prizmalar, piramitler, küre gibi düzgün cisimlerin incelenmesinde… Farklı olarak simetri merkezine ve simetri eksenine simetri düzlemi eklemlenerek. Düzlemdeki simetri kavramının uzaya taşınması uzayda incelenen cisimlerin kavranmasını da kolaylaştıracaktır.

-IX-
NASIL MATEMATİK ÖĞRETMENİ?

Öğrencilerin "ben anlamadım" hatta "hiçbir şey anlamadım" tepkisi ile sık karşılaşırız. Öğretmen için zordur bu tepkiyle karşılaşmak. Anlaşılsın diye harcanan bir emek vardır ortada çünkü. Bu nedenle can sıkıcıdır. Öğrencinin dile getirdiği tepkiye karşın öğretmenin geliştirdiği bir tepki de olur doğal olarak. Bu dillendirilen değil duyulan tepkidir. Neler olabilir bu tepkiler?

"**Densiz çocuk**" tepkisi. Bu ilkel bir tepkidir. Herhangi birisinin tepkisi olabilir ama öğretmenin tepkisi olamaz. Bu tepkide pedagojik hiçbir yan yok. Neden pedagojik değildir? Çünkü düşünülmüş bir tepki değildir ve bu tepkinin arkasında "acaba neden anlamadı" sorusu yoktur. Altında ilkel bir kızgınlık vardır.

"**Herkes anladı sen anlamadın**" tepkisi. Bu tepki ilkel olmanın da ötesinde. Aşağılayıcı ve kaba. Ve hatta ahlâki değil. Öğrencinin kavrayışı gerçekten geri olabilir. O zaman "o"nun kavrayış düzeyine göre anlatımı gerektirir. Öğretmenin duyguları içinde öğrenciyi aşağılayan duygu olamaz. Hele hele kızgınlıkla olsa da "aptal", "geri zekâlı" gibi sözcükler öğretmenin sözlüğünde asla olamaz.

Bu tavrın bir örneğini yıllar önce öğretmen olarak çalıştığım bir lisede yaşadım. Mesleğinin ikinci yılında olan genç bir kadın öğretmen arkadaşım, ders çıkışında hışımla öğretmenler odasına girdi. Elindeki ders defterini masanın üzerine atarak kızgın ve de daha çok çaresiz bir ifadeyle "bunlar geri zekâlı. Üç kez anlattım. Yine anlamıyorlar!". Bunları söylerken bana bakıyor, belli ki onayımı bekliyordu. Ben "iki yıl önce de senin için aynı şeyi söyleyenler vardı. Sen de öğrenciydin" dedim. Yanıtım sert hatta acımasızdı. Ama çarpıcıydı ve arkadaşımın bana kırılmayacağını biliyordum. Mesajı aldı, yanıma oturdu. "Ama hocam ben onları çok seviyorum" dedi. "Biliyorum" diye yanıtladım. Öyleydi de gerçekten. Öğretmek için çırpınan bir öğretmendi. O sakinleştikten sonra konuyu nasıl anlatacağımızı birlikte yeniden ele aldık.

"**Git tekrar et**" tepkisi. Daha insancıl olsa da altında "görev savma" anlayışını barındırır. Neden anlamadı sorusunu gereksiz gören bir tepkidir. Elbette öğrenciden öğrendiklerini tekrar etmesi istenebilir. Ama bu istek, işbirliği içermeli ve doğru yaklaşım; "önce sen gözden geçir, sonra birlikte bakalım" biçiminde olmalı.

"**Tamam. Sen tepkini açıkça söyledin. Neden anlamadığını birlikte araştıralım**!" tepkisi. Her hangi birisi için fazla "anlayışlı" gelebilir ama eğitimci için doğru olan tepki budur. İşbirliği içerir ve çözüm mutlaktır.

Çözüm aramak ve bulmak öğretmen başarısının temel ölçüsüdür. Bu saptamanın arkasını "nasıl öğretmen" sorusuna verilecek yanıtlarla doldurmak gerek. Yeri geldikçe örnek vererek bunu yapmaya çalıştık. Son olarak da iyi bir matematik öğretmenliği için ilk akla gelenleri "sadece" sıralayalım…

Öğretmen bilim, bilgi, bilim felsefesi, bilim tarihi konusunda kendisini yetiştirmeli. Yeri geldikçe doğrudan ya da anekdotlarla bunları anlatmalı. Anlatacağı konularla bunları birleştirmeli konuyu ilginç ve anlaşılır hale getirmelidir.

Öğretmen alan bilgisi ve mesleki yeterlilik konusunda yetkin olmalı. Kendisini sürekli geliştirmeli ve yeniliğe açık olmalıdır.

Öğretmen matematiğin ilkelerinden ödün vermemeli. Ma-

tematiksel bilginin ispata dayalı olduğunu unutmamalı, ısrarla vurgulamalı, ispatları olabildiğince öğrenciye yaptırılmalıdır.

Oluşturulan ve ispatlanan bilginin kullanılma yani pekiştirme aşamasında, soru çeşitliliği ve anlaşılırlığına ve çözülebilirliğine özen göstermeli, ölçme sorularına zemin hazırlamalıdır.

Öğretmen her öğrenciye eşit uzaklıkta olmalı. Yetenekli öğrencilerle ilgilenmeli. Ancak okullarda kitle eğitimi yapıldığını, sırada oturan her öğrencinin matematik öğrenme hakkı olduğunu göz ardı etmemelidir.

Öğretmen öğrenciyi aktif kılmalı. Eski bilgilerden ve yaşamsal örneklerden yola çıkarak öğrencilerin yeni bilgi ve kavramlara ulaşmasını sağlamalıdır. Ulaşılan kavramları tanımlara dönüştürmede dili doğru ve net kullanmalı. Kavramların evrenselliği noktasında ısrarcı olmalıdır.

Kullanılamayan bilginin öğrenilen bilgi olmadığı, öğrenilemeyen bilginin yeni öğrenmelere açık olamayacağı gerçeğinden hareketle, "konuları yetiştiremem" kaygısına teslim olmamalıdır.

Matematik öğretiminde modellemenin önemini bilmeli, ancak matematiğin nesnelerinin modeller olduğunu da bilmeli, anlamsız ve karmaşaya neden olabilecek modellerden kaçınmalıdır.

Matematik öğretimi belki de hiçbir derste olmadığı kadar özgür ortam gerektirir. Matematik öğretiminin vazgeçilmez araçları "düşünme, akıl yürütme ve konuşma"dır. O nedenle ders ortamında gelenekçi ilkelerden uzak olmalıdır.

Öğrenciyi özgürce eleştiri yapabilme, itiraz edebilme olgunluğuna ulaştıracak olan lider öğretmendir. Öğretmen eleştirileri dinleyerek, itirazları yönlendirerek lider olur. Akıl yürütme ve düşünme öne çıktığı ölçüde sınıf özgürleşir, olgunlaşır. İlkellikten uzaklaşır.

Değerlendirme aşamasında; istenilen davranışın oluşup oluşmadığını ölçen sorular sormalı ve öğrencide "başardım" duygusunu yaratmaya özen göstermelidir. Özel ilgi ve yetenek isteyen soruları ölçme sorusu olarak sormaktan kaçınmalıdır. Ölçme ve değerlendirmenin bir diğer ve bir o kadar önemli amacı "ne kadar başardığımızı" anlamak olmalıdır.

Bir kurumda çalışan matematik öğretmenlerinin işbirliği ve hatta diğer ders öğretmeleriyle iletişimi ölçülemez değere sahiptir. Ders notlarını ve soru çözümlerini paylaşmak, kaçamak ara seminerler-tartışmalar yapmak, birbirinin dersini izlemek… gibi. Bu nedenle öğretmen işbirliğine açık olmalıdır.

Elbette sıraladığımız ve sıralanabilecek bazı edimler sadece matematik öğretmeni için geçerli olan özellikler değil... Ama biz payımıza düşeni tartışıyoruz. Elimizden geldiğince...

MATEMATİK ZOR GÜZEL

Anadolu Üniversitesi Öğretim Üyesi Şahin Koçak, *50 Soruda Matematik* adlı kitabında (Bilim ve Gelecek Kitaplığı) şöyle diyor: "… tabii matematik zor bir güzel. Dinlenip hoşa giden bir melodi, bakılıp hoşa giden bir resim, okunup hoşa giden bir şiir gibi değil. Aslında belki bunlar da eğitim gerektiren rafine zevkler, ama matematikteki daha saklı bir güzellik. Ondan zevk alıp, heyecan duymak için, hiç olmazsa bir kere anlama deneyimi yaşamak lazım…" (Şahin Koçak, *50 Soruda Matematik*, Bilim ve Gelecek Kitaplığı, s. 295)

Bu saptama son derece gerçek ve söylediklerimizle uyum içinde. O nedenle matematiğin "kolay olduğu" gibi gerçekçi olmayan ikna çabaları anlamsızdır ve güvenilirliğimizi yok eder. Anlaşılsın diye matematiği kolaylaştırmaya çalışmak da bir o kadar anlamsızdır. Kavranacak halka "matematiğin güzel ve öğrenilebilir" olduğu olmalıdır. Her güzel şeye sahip olmanın çaba ve emek istediği gerçeğinden hareketle… Öğrenmenin ve matematiğin ilkelerinden ödün vermeden… Yani öğretmen öğrenci ilişkisini, ders etkinliğini, düşünme erdeminin güzelliğini popülist yaklaşımlara feda etmeden.

Bu da ancak; bilime, matematiğin insan hayatına olan katkısına ve öğrenilebilirliğine inanarak gerçekleşebilir. Öncelikli olarak da başarılacağına güvenerek…